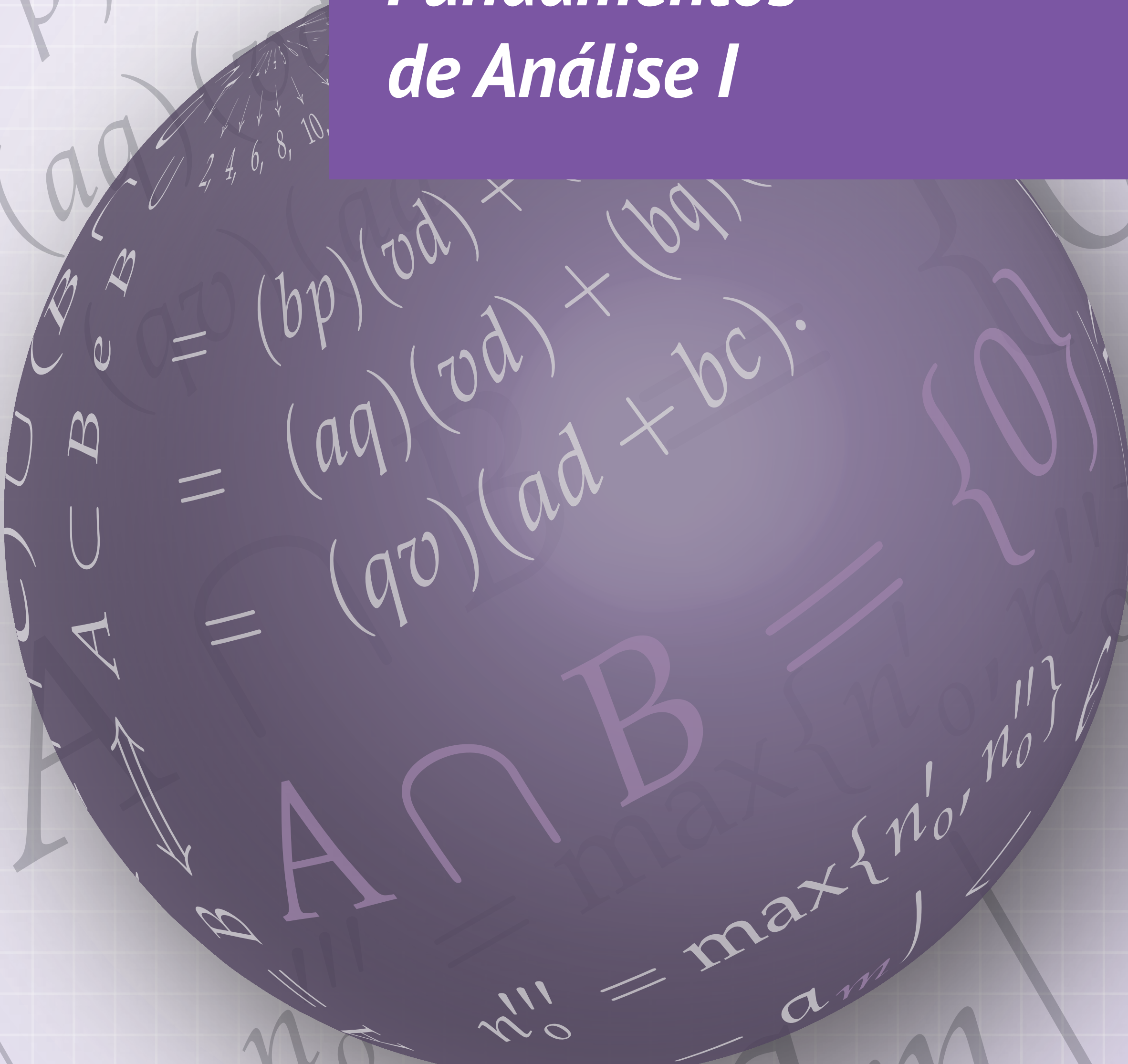
Universidade Federal de Minas Gerais
Educação a Distância
2013

Fundamentos de Análise I



Paulo Cupertino de Lima

Fundamentos de Análise I

Paulo Cupertino de Lima

Fundamentos de Análise I

Belo Horizonte
CAED-UFMG
2013

COLEÇÃO EAD – MATEMÁTICA
Coordenador: Dan Avritzer
LIVRO: Fundamentos de Análise I
Autores: Paulo Cupertino de Lima
Revisão: Jussara Maria Frizzera
Projeto Gráfico: Departamento de Design - CAED
Formatação: Sérgio Luz

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Luciana de Oliveira M. Cunha, CRB-6/2725)

Lima, Paulo Cupertino de
L732f Fundamentos de análise I / Paulo Cupertino de Lima. – Belo Horizonte : CAED-UFMG, 2013.
131 p. : il. p&b. ; 27 cm.

Inclui bibliografia.

ISBN 978-85-64724-25-9

1. Teoria dos conjuntos. 2. Funções (Matemática). 3. Ensino a distância. I. Universidade Federal de Minas Gerais. II. Título.

CDD 510.07
CDU 510.22

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Esse livro foi escrito para ser utilizado no curso de Licenciatura em Matemática a distância, oferecido pela UFMG em diversos polos.

Tendo em vista que esse livro é destinado a cursos a distância, o texto possui características específicas para assim ser utilizado.

Nesse livro definimos conjuntos, as operações sobre os mesmos, introduzimos as noções de funções injetiva, sobrejetiva e bijetiva e de composta de duas funções. Introduzimos os conceitos de conjuntos enumeráveis e não enumeráveis, construimos os números racionais a partir dos inteiros, definimos os números reais a partir do postulado de Dedekind e fazemos um estudo de sequências numéricas e de limites. Assumimos que o aluno tenha visto os números naturais e o números inteiros e que ele tenha familiaridade com Princípios da Boa Ordenação e da Indução.

Na Aula 1 definimos conjunto, as operações sobre conjuntos (união, interseção, complementar, diferença e produto cartesiano) e demonstramos as relações de De Morgan. Introduzimos os conceitos de funções injetiva, sobrejetiva e bijetiva e de composta de duas funções.

Na Aula 2 introduzimos os conceitos de conjuntos finito, enumerável e não-emumerável, o conceito de cardinalidade de um conjunto e provamos os principais teoremas relacionados. Mostramos que os conjuntos $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ são enumeráveis e demos exemplos de conjuntos não enumeráveis.

Na Aula 3 introduzimos o conceito de classes de equivalência e construimos os números racionais a partir dos inteiros, como classes de equivalência em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. Falamos sobre a representação decimal de números racionais e mostramos que $\sqrt{2}$ não é um número racional.

Na Aula 4 introduzimos o conceito de corpo ordenado, mostramos que o conjunto dos números racionais é um corpo ordenado, provamos algumas desigualdades que valem para um corpo ordenado qualquer. Introduzimos os conceitos de cotas superior e inferior, de ínfimo e de supremo de um conjunto.

Na Aula 5 definimos o conjunto dos números reais a partir do postulado de Dedekind, provamos vários resultados envolvendo os conceitos de ínfimo e de supremo de um conjunto. Mostramos que números racionais são densos em $\mathbb{R}$ e definimos a raiz n-ésima de um número real não negativo.

Na Aula 6 demonstramos o Teorema dos Intervalos Encaixados e mostramos que o conjunto dos números reais é não enumerável. Falamos sobre valor absoluto e desigualdades.

Na Aula 7 introduzimos os conceitos de sequência numérica e de limite de sequências. Mostramos a unicidade do limite, provamos o Teorema do Sanduiche, falamos sobre as propriedades de limites e introduzimos o conceito de subsequência.

Na Aula 8 introduzimos o conceito de sequência monótona, mostramos que toda sequência monótona limitada é convergente e provamos o Teorema de Bolzano-Weierstrass. Definimos sequência de Cauchy e mostramos que uma sequência de números reais é convergente se, e somente se, ela for de Cauchy. Falamos sobre a representação decimal de números reais.

NOTA DO EDITOR

A Universidade Federal de Minas Gerais atua em diversos projetos de Educação a Distância, que incluem atividades de ensino, pesquisa e extensão. Dentre elas, destacam-se as ações vinculadas ao Centro de Apoio à Educação a Distância (CAED), que iniciou suas atividades em 2003, credenciando a UFMG junto ao Ministério da Educação para a oferta de cursos a distância.

O CAED-UFMG (Centro de Apoio à Educação a Distância da Universidade Federal de Minas Gerais), Unidade Administrativa da Pró-Reitoria de Graduação, tem por objetivo administrar, coordenar e assessorar o desenvolvimento de cursos de graduação, de pós-graduação e de extensão na modalidade a distância, desenvolver estudos e pesquisas sobre educação a distância, promover a articulação da UFMG com os polos de apoio presencial, como também produzir e editar livros acadêmicos e/ou didáticos, impressos e digitais, bem como a produção de outros materiais pedagógicos sobre EAD.

Em 2007, diante do objetivo de formação inicial de professores em serviço, foi criado o Programa Pró-Licenciatura com a criação dos cursos de graduação a distância e, em 2008, com a necessidade de expansão da educação superior pública, foi criado pelo Ministério da Educação o Sistema Universidade Aberta do Brasil – UAB. A UFMG integrou-se a esses programas, visando apoiar a formação de professores em Minas Gerais, além de desenvolver um ensino superior de qualidade em municípios brasileiros desprovidos de instituições de ensino superior.

Atualmente, a UFMG oferece, através do Pró-licenciatura e da UAB, cinco cursos de graduação, quatro cursos de pós-graduação *lato sensu*, sete cursos de aperfeiçoamento e um de atualização.

Como um passo importante e decisivo, o CAED-UFMG decidiu, no ano de 2011, criar a Editora CAED-UFMG como forma de potencializar a produção do material didático a ser disponibilizado para os cursos em funcionamento.

Fernando Selmar Rocha Fidalgo
Editor

1 Conjuntos e funções

AULA1: CONJUNTOS E FUNÇÕES

OBJETIVOS
Ao final dessa aula, o aluno deverá ser capaz de:
1. Compreender o conceito de conjunto e lidar com as operações sobre conjuntos.
2. Compreender os conceitos de funções injetiva, sobrejetiva e bijetiva, bem como a composição de duas funções.

1.1 A definição de conjunto

Uma discussão satisfatória dos principais conceitos de análise (por exemplo, convergência, continuidade, diferenciabilidade e integração) deve ser baseada no conceito de conjunto.

Definição 1.1. *Um* conjunto *é uma coleção de objetos, conhecidos como* elementos *do conjunto. Normalmente, usam-se letras maiúsculas para denotar os conjuntos e letras minúsculas para denotar os elementos de um conjunto.*

Exemplo 1.1. $A = \{a, b, c, d\}$ *é o conjunto cujos elementos são* a, b, c, d.

Exemplo 1.2. *Exemplos muito importantes de conjuntos são os conjuntos numéricos* $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ *e* $\mathbb{R}$, *dos números naturais, inteiros, racionais e reais, respectivamente.*

Se um elemento a pertencer ao conjunto A, então denotamos este fato escrevendo $a \in A$, lê-se a pertence a A. Por outro lado, se a não for um elemento de A, escrevemos $a \notin A$, lê-se a não pertence a A.

Exemplo 1.3. *Se* $A = \{-2, 0, 4, 5\}$, *então* $0 \in A$ *e* $1 \notin A$.

Definição 1.2. *Se todos os elementos de um conjunto* A *pertencerem ao conjunto* B, *dizemos que* A *está contido em* B *e escrevemos*

$$A \subset B,$$

lê-se A *está contido em* B. *Equivalentemente, se todos os elementos de* A *pertencerem a* B, *então* B *contém todos os elementos de* A *e dizemos que* B *contém* A *e escrevemos*

$$B \supset A.$$

Exemplo 1.4. *Se* $A = \{-2, 0, 4, 5\}$ *e* $B = \{-2, -1, 0, 2, 4, 5\}$, *então* $A \subset B$ *ou* $B \supset A$.

Às vezes não sabemos a priori se um conjunto tem elementos, por isso é conveniente introduzir o conjunto chamado vazio, ou seja, o conjunto que não tem elementos. Tal conjunto será denotado pelo símbolo $\emptyset$.

Exemplo 1.5. *Se* A *for o conjunto das raízes inteiras da equação* $x^2 + 1 = 0$, *então* $A = \emptyset$, *pois o quadrado de qualquer inteiro é um inteiro não negativo, portanto,* $x^2 + 1$ *vale pelo menos* 1.

1.2 Operações sobre conjuntos

Definição 1.3. *Dados arbitrariamente dois conjuntos A e B, denotamos por $A \cup B$ o conjunto formado pela união de A e B. Dizer que $a \in A \cup B$ significa que a pertence a pelo menos um dos dois conjuntos A ou B.*

Exemplo 1.6. *Se $A = \{-2, 0, 4, 5\}$ e $B = \{0, 1, 3\}$, então*

$$A \cup B = \{-2, 0, 1, 3, 4, 5\}.$$

De maneira análoga, definimos a união de um número qualquer (finito ou não) de conjuntos: se A_α's são conjuntos arbitrários, onde os índices α's pertencem ao conjunto Ω, então a união dos A_α's é denotada por $\cup_{\alpha\in\Omega} A_\alpha$ e dizer que a pertence a $\cup_{\alpha\in\Omega} A_\alpha$ significa que $a \in A_\alpha$ para algum $\alpha \in \Omega$.

Definição 1.4. *A interseção de dois conjuntos A e B, denotada por $A \cap B$ é o conjunto composto por todos os elementos que pertencem a A e a B ao mesmo tempo.*

Exemplo 1.7. *Se $A = \{-2, 0, 4, 5\}$ e $B = \{0, 1, 3\}$, então*

$$A \cap B = \{0\}.$$

De maneira análoga, definimos a interseção de um número qualquer (finito ou não) de conjuntos: se A_α's são conjuntos arbitrários, onde os índices α's pertencem ao conjunto Ω, então a interseção dos A_α's é denotada por $\cap_{\alpha\in\Omega} A_\alpha$. Dizer que a pertence a $\cap_{\alpha\in\Omega} A_\alpha$ significa que $a \in A_\alpha$, para todo $\alpha \in \Omega$.

Nas Figuras 1.1 e 1.2 as áreas hachuradas representam a união e interseção dos conjuntos A e B, respectivamente, através de diagramas de Venn.

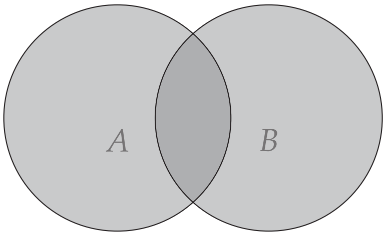


Figura 1.1: $A \cup B$

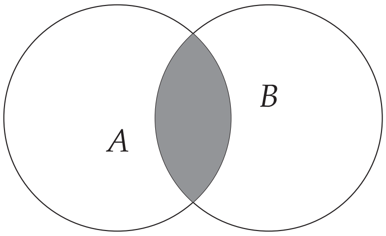


Figura 1.2: $A \cap B$.

Definição 1.5. *Dizemos que dois conjuntos A e B são iguais e denotamos $A = B$, quando todos os elementos de A pertencem a B e todos os elementos de B pertencem a A, ou seja,*

$$A = B \iff A \subset B \text{ e } B \subset A,$$

onde o símbolo $\iff$ significa "é equivalente a" ou "se, e somente se".

Exercício 1.1. *Prove que* $A \cap B \subset A \subset A \cup B$.
Sugestão: *Para provar a dupla inclusão deve-se mostrar que* $A \cap B \subset A$ *e* $A \subset A \cup B$.

Exemplo 1.8. *Mostraremos que*

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

De fato, para provarmos a relação acima, temos que mostrar as seguintes inclusões:

$$(A \cup B) \cap C \subset (A \cap C) \cup (B \cap C) \tag{1.1}$$

e

$$(A \cap C) \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap C. \tag{1.2}$$

A seguir mostraremos (1.1), ou seja, se $x \in (A \cup B) \cap C$, então $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$. De fato, se $x \in A \cup B$ *e* $x \in C$, então temos uma das seguintes possibilidades: (i) $x \in A$ *e* $x \in C$, portanto $x \in A \cap C$, ou (ii) $x \in B$ *e* $x \in C$, portanto, $x \in B \cap C$. Portanto, temos uma das seguintes possibilidades: $x \in A \cap C$ ou $x \in B \cap C$, logo

$$x \in (A \cap C) \cup (B \cap C),$$

o que mostra (1.1).

A seguir, mostraremos (1.2), ou seja, se $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$, então $x \in (A \cup B) \cap C$. De fato, se $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$, então temos uma das seguintes possilidades: (i) $x \in A \cap B$ ou (ii) $x \in B \cap C$. No caso (i) temos $x \in A$ e $x \in C$, como $x \in A$, então $x \in A \cup B$, portanto $x \in A \cup B$ e $x \in C$, logo

$$x \in (A \cup B) \cap C.$$

No caso (ii) temos $x \in B$ e $x \in C$, como $x \in B$, então $x \in A \cup B$, portanto $x \in A \cup B$ e $x \in C$, logo

$$x \in (A \cup B) \cap C,$$

o que mostra (1.2). □

Exercício 1.2. *Mostre que*

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

Exercício 1.3. *Mostre que as operações de união e interseção são comutativas e associativas, ou seja,*

$$A \cup B = B \cup A, \;\; (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \;\; A \cap B = B \cap A,$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

Exercício 1.4. *Mostre que*
(i) se $A \cup B = A \cup C$, então $B = C$,

(ii) se $A \cap B = A \cap C$, então $B = C$.

Definição 1.6. *Dados dois conjuntos A e B, denotamos por $A - B$, o conjunto consistindo daqueles elementos de A que não pertencem a B, formalmente,*

$$A - B = \{x \in A \, : \, x \notin B\}.$$

Na Figura 1.3 *a área hachurada representa a operação $A - B$, através de diagrama de Venn.*

Exemplo 1.9. *Note que*

$$\{1, 2, 3\} - \{2, 3, 4\} = \{1\} \text{ e } \{2, 3, 4\} - \{1, 2, 3\} = \{4\}.$$

Exercício 1.5. *Sejam $A = \{-2, -1, 0, 3\}$ e $B = \{0, 1, 3\}$, encontre $A - B$ e $B - A$.*

Definição 1.7. *Se $A \subset B$, chamamos de complementar de A em relação a B, o conjunto $B - A$ e o denotamos por $A^c(B)$.*

Exemplo 1.10. *Sejam $A = \{1, 3\}$ e $B = \{1, 3, 4, 8\}$, então*

$$A^c(B) = \{4, 8\}.$$

Em muitas situações haverá um conjunto universo (poderia ser, por exemplo, o conjuntos dos números reais) e os demais conjuntos serão subconjuntos dele. Em particular, dado um conjunto A, por A^c denotaremos o complementar de A em relação ao conjunto universo.

Definição 1.8. *A diferença simétrica de dois conjuntos A e B, denotada por $A \bigtriangleup B$, é definida como*

$$A \bigtriangleup B = (A - B) \cup (B - A).$$

Na Figura 1.4 a área hachurada representa a operação $A \Delta B$, através de diagrama de Venn.

Exemplo 1.11. *Se $A = \{1, 2, 4, 5\}$ e $B = \{2, 3, 5\}$, então*

$$A \bigtriangleup B = \{1, 3, 4\}.$$

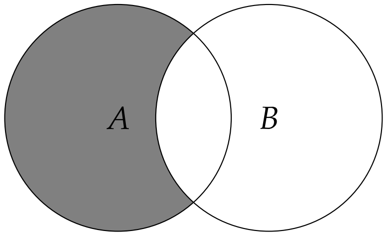


Figura 1.3: $A - B$

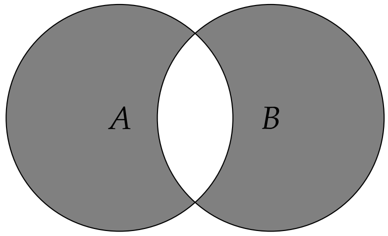


Figura 1.4: $A \Delta B$

Exemplo 1.12. *Mostre que*

$$(A \cup B) - A = B - A. \tag{1.3}$$

De fato, para mostrarmos que $(A \cup B) - A = B - A$, temos que mostrar as seguintes inclusões:

$$(A \cup B) - A \subset B - A \tag{1.4}$$

e

$$B - A \subset (A \cup B) - A. \tag{1.5}$$

A seguir mostraremos (1.4), ou seja, se $x \in (A \cup B) - A$, então $x \in B - A$. Tome arbitrariamente $x \in (A \cup B) - A$, então $x \in A \cup B$ e $x \notin A$. Mas se $x \in A \cup B$, significa que $x \in A$ ou $x \in B$, mas por hipótese $x \notin A$, logo $x \in B$. Então $x \in B$ e $x \notin A$, o que significa que $x \in B - A$, com isso provamos (1.4).

A seguir mostraremos (1.5), ou seja, se $x \in B - A$, então $x \in (A \cup B) - A$. Tome arbitrariamente $x \in B - A$, então $x \in B$ e $x \notin A$. Mas se $x \in B$, então $x \in A \cup B$. Então $x \in A \cup B$ e $x \notin A$, o que significa que $x \in (A \cup B) - A$, com isso provamos (1.5). $\square$

Exercício 1.6. *Mostre que*

$$(A \cup B) - B = A - B. \tag{1.6}$$

Teorema 1.1. *(De Morgan) Seja $(A_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$ uma coleção de subconjuntos de S, então valem as seguintes relações:*

$$S - \cup_{\alpha\in\Omega} A_\alpha = \cap_{\alpha\in\Omega}(S - A_\alpha), \tag{1.7}$$

(o complemento da união é a interseção dos complementos) e

$$S - \cap_{\alpha\in\Omega} A_\alpha = \cup_{\alpha\in\Omega}(S - A_\alpha), \tag{1.8}$$

(o complemento da interseção é igual a união dos complementos).

Prova. Suponha que $x \in S - \cup_{\alpha\in\Omega} A_\alpha$, então $x \notin \cup_\alpha A_\alpha$, ou seja, x não pertence a nenhum dos A_α, portanto, para cada $\alpha \in \Omega$, temos $x \in S - A_\alpha$, portanto, $x \in \cap_{\alpha\in\Omega}(S - A_\alpha)$, o que mostra que

$$S - \cup_{\alpha\in\Omega} A_\alpha \subset \cap_{\alpha\in\Omega}(S - A_\alpha). \tag{1.9}$$

Por outro lado, se $x \in \cap_{\alpha\in\Omega}(S - A_\alpha)$, então $x \in S - A_\alpha$, para todo $\alpha \in \Omega$. Portanto, para todo $\alpha \in \Omega$, $x \notin A_\alpha$, portanto $x \notin \cup_\alpha A_\alpha$, por conseguinte $x \in S - \cup_{\alpha\in\Omega} A_\alpha$, o que mostra que

$$\cap_{\alpha\in\Omega}(S - A_\alpha) \subset S - \cup_{\alpha\in\Omega} A_\alpha. \tag{1.10}$$

De (1.9) e de (1.10), temos (1.7). Deixamos a demonstração de (1.8) para o aluno. □

Note que (1.7) e (1.8) podem ser reescritas como

$$(\cup_\alpha A_\alpha)^c = \cap_\alpha A_\alpha^c \ e \ (\cap_\alpha A_\alpha)^c = \cup_\alpha A_\alpha^c\,,$$

respectivamente, onde o complementar é em relação ao conjunto S.

Se tivermos apenas dois conjuntos, digamos A e B, podemos tomar o complementar em relação a $S = A \cup B$. Neste caso temos

$$(A \cap B)^c = (A \cup B) - (A \cap B),$$

$$A^c = (A \cup B) - A,$$

e

$$B^c = (A \cup B) - B.$$

De (1.8)

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c,$$

portanto, das relações acima, temos concluimos que

$$(A \cup B) - (A \cap B) = ((A \cup B) - A) \cup ((A \cup B) - B). \tag{1.11}$$

Exemplo 1.13. *Mostraremos que*

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B).$$

Note que

$$\begin{aligned} A\Delta B &= (A - B) \cup (B - A) \quad (\text{usamos a definição de } A\Delta B) \\ &= ((A \cup B) - B) \cup ((A \cup B) - A) \ (\text{usamos (1.3) e (1.6)}) \\ &= (A \cup B) - (A \cap B) \quad (\text{usamos (1.11)}). \end{aligned}$$

□

1.3 Produto cartesiano de conjuntos

Definição 1.9. *Dados dois conjuntos A e B, o produto cartesiano de A e B, denotado por $A \times B$, é o conjunto dos pares ordenados (a, b), tais que que $a \in A$ e $b \in B$.*

Exemplo 1.14. *Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 4\}$, então*

$$A \times B = \{(1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 2), (3, 4)\}.$$

Exercício 1.7. *Encontre o produto cartesiano dos conjuntos $A = \{0, 1, 4\}$ e $B = \{2, 3\}$.*

Exercício 1.8. *Sejam $X = \{a, b\}$, $Y = \{b, c, d\}$ e $Z = \{b, e\}$.*

(a) *Encontre os conjuntos $(X \cup Y) \times Z$ e $(X \times Z) \cup (Y \times Z)$ e os compare.*
(b) *Encontre os conjuntos $(X \cap Y) \times Z$ e $(X \times Z) \cap (Y \times Z)$ e os compare.*

Teorema 1.2. *Sejam X, Y, Z conjuntos, então*

$$(X \cup Y) \times Z = (X \times Z) \cup (Y \times Z) \tag{1.12}$$

e

$$(X \cap Y) \times Z = (X \times Z) \cap (Y \times Z). \tag{1.13}$$

Prova. Suponha que $(a, b) \in (X \cup Y) \times Z$. Então $b \in Z$ e $a \in X$ ou $a \in Y$, portanto, $(a, b) \in X \times Z$ ou $(a, b) \in (Y \times Z)$, portanto, $(a, b) \in (X \times Z) \cup (Y \times Z)$, o que mostra que

$$(X \cup Y) \times Z \subset (X \times Z) \cup (Y \times Z). \tag{1.14}$$

Por outro lado, se $(a, b) \in (X \times Z) \cup (Y \times Z)$, então $b \in Z$ e $a \in X$ ou $a \in Y$. Portanto $(a, b) \in (X \cup Y) \times Z$, o que mostra que

$$(X \times Z) \cup (Y \times Z) \subset (X \cup Y) \times Z. \tag{1.15}$$

De (1.14) e (1.15), temos (1.12).

Para provarmos (1.13), suponha que $(a, b) \in (X \cap Y) \times Z$, então $a \in X \cap Y$ e $b \in Z$. Logo $a \in X$, $a \in Y$ e $b \in Z$, portanto $(a, b) \in (X \times Z)$ e $(a, b) \in (Y \times Z)$, estas duas inclusões implicam que $(a, b) \in (X \times Z) \cap (Y \times Z)$, ou seja,

$$(X \cap Y) \times Z \subset (X \times Z) \cap (Y \times Z). \tag{1.16}$$

Por outro lado, se $(a, b) \in (X \times Z) \cap (Y \times Z)$, então (a, b) pertence a $(X \times Z)$ e (a, b) pertence a $(Y \times Z)$, o que implica $a \in X$, $a \in Y$, e $b \in Z$. Portanto $a \in X \cap Y$ e $b \in Z$, consequentemente, $(a, b) \in (X \cap Y) \times Z$, ou seja,

$$(X \times Z) \cap (Y \times Z) \subset (X \cap Y) \times Z. \tag{1.17}$$

De (1.16) e (1.17), temos (1.13). $\square$

Definição 1.10. *O produto cartesiano $A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_n$, dos conjuntos $A_1, \ldots, A_n$ é o conjunto das n-uplas $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, onde $a_i \in A_i$, para $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Exemplo 1.15. *Sejam $X = \{a, b\}$, $Y = \{c, d\}$ e $Z = \{e\}$. Então $X \times Y \times Z = \{(a, c, e), (a, d, e), (b, c, e), (b, d, e)\}$.*

Exemplo 1.16. *O espaço $\mathbb{R}^n$ é o produto cartesiano de $\mathbb{R}$ com ele mesmo n vezes.*

1.4 Funções injetivas, sobrejetivas, bijetivas e compostas

Nesta seção introduziremos rapidamente os conceitos de funções injetiva, sobrejetiva, bijetiva e de composição de duas funções. Embora as definições dadas se apliquem a conjuntos arbitrários, assumiremos que o aluno conheça apenas os números naturais e inteiros. Os números racionais e reais serão introduzidos nas Aulas 3 e 5, respectivamente. Por isso nos restringiremos a exemplos de funções cujos domínios e contradomínios sejam subconjuntos dos números naturais e inteiros. Exemplos de funções onde os domínios e contradomínios serão subconjuntos dos números reais serão vistos no curso de Fundamentos de Análise II, quando falaremos de funções de uma variável real.

Definição 1.11. *Dados arbitrariamente dois conjuntos A e B, dizemos que está definida sobre A uma* função *f com valores em B, se para cada elemento $x \in A$ corresponder um único elemento $y \in B$, o qual denotamos por $f(x)$. Simbolicamente $f : A \to B$ denota uma função definida em A e tomando valores em B. Os conjuntos A e B são chamados de* domínio *e* contra-domínio *de f, respectivamente. A* imagem *de f é o conjunto*

$$\{y \in B \,:\, y = f(x), \textit{para algum } x \in A\},$$

que denotamos por $f(A)$.

Definição 1.12. *Seja $f : A \to B$ uma função, onde A e B são dois conjuntos arbitrários.*

Dizemos que f é injetiva *ou* injetora, *se para todos $x, y \in A$, com $x \neq y$, tivermos $f(x) \neq f(y)$.*

Dizemos que f é sobrejetiva *ou* sobrejetor*a, se para todo $y \in B$ existir algum $x \in A$, tal que $y = f(x)$, ou seja, $B = f(A)$.*

Se f for injetiva e sobrejetiva, dizemos que f é uma função bijetiva *ou* bijetora, *neste caso dizemos que existe uma* bijeção *entre os conjuntos A e B.*

Exemplo 1.17. *Dados os conjuntos $A = \{1,2,3,4\}$ e $B = \{1,2,3,4\}$, seja $f : A \to B$ definida por*

$$f(1) = 4,\ f(2) = 1,\ f(3) = 2,\ f(4) = 3.$$

Então f é injetiva, pois se x e y são elementos de A, com $x \neq y$, então $f(x) \neq f(y)$. Além disso, f é sobrejetiva, pois para todo $y \in B$, existe pelo menos um $x \in A$, tal que $f(x) = y$. Como f é injetiva e sobrejetiva, então f é bijetiva.

Exemplo 1.18. *Dados os conjuntos $A = \{1,2,3,4\}$ e $B = \{1,2,3\}$, seja $f : A \to B$ definida por*

$$f(1) = 2,\ f(2) = 1,\ f(3) = 3,\ f(4) = 3.$$

Então f não é injetiva, pois $3, 4 \in A$, $3 \neq 4$ e $f(3) = f(4)$. Além disso, f é sobrejetiva, pois para todo $y \in B$, existe pelo menos um $x \in A$, tal que $f(x) = y$. Como f não é injetiva, então f não é bijetiva.

Exemplo 1.19. *Dados os conjuntos* $A = \{1, 2, 3\}$ *e* $B = \{1, 2, 3\}$*, seja* $f : A \to B$ *definida por*

$$f(1) = 2,\ f(2) = 1,\ f(3) = 2.$$

Então f *não é injetiva, pois* $1, 3 \in A$*,* $1 \neq 3$ *e* $f(1) = f(3)$*. Além disso,* f *não é sobrejetiva, pois* $3 \in B$ *e não existe* $x \in A$*, tal que* $f(x) = 3$*.*

Exercício 1.9.

(i) *Dê um exemplo de uma função* $f : \{1, 2, 3\} \to \{3, 5, 6, 9\}$ *que seja injetiva.*
(ii) *É possível definir uma função* $g : \{1, 2, 3\} \to \{3, 5, 6, 9\}$ *que seja sobrejetiva?*
(iii) *É possível definir uma função* $h : \{1, 2, 3\} \to \{3, 5, 6, 9\}$ *que seja bijetiva?*

Exercício 1.10. *Quantas funções injetivas existem de* $\{1, 2, 3\}$ *em* $\{1, 2, 3\}$ *?*

Exemplo 1.20. *Sejam* $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ *e* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$*, definida por*

$$f(n) = n^2 + 1.$$

Então f *é injetiva, mas não é sobrejetiva.*

De fato, suponha que $m, n \in \mathbb{N}$ e $m \neq n$, então

$$f(m) - f(n) = n^2 - m^2 = (m - n)(m + n) \neq 0,$$

pois $m \neq n$, implica que $m - n \neq 0$ e $m, n \in \mathbb{N}$, implica que $m + n \in \mathbb{N}$, portanto $m + n \neq 0$. Como $f(m) \neq f(n)$ sempre que $m \neq n$, concluimos que f é injetiva. Note que, como o contradomínio de f é $\mathbb{N}$, então 1 faz parte do contradomínio de f, mas não existe n no domínio de f, tal que $f(n) = 1$, pois se $n \in \mathbb{N}$, então $f(n) = n^2 + 1 \geq 2$, portanto f não é sobrejetiva. $\square$

Exercício 1.11. *Seja* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$*, definida por* $f(n) = 2n$*. A função* f *é bijetiva?*

Exercício 1.12. *Mostre que a função* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$*, definida por* $f(n) = n - 1$ *é bijetiva.*

Exercício 1.13. *Mostre que a função* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$*, definida por* $f(n) = n^2$ *é injetiva. Ela é sobrejetiva?*

Exercício 1.14. *Seja* $2\mathbb{N}$ *o conjunto dos números naturais pares, ou seja, o conjunto dos números da forma* $2n$*, onde* $n \in \mathbb{N}$*. Mostre que a função* $f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$*, definida por* $f(n) = 2n$*, é bijetiva.*

Exercício 1.15. *Mostre que a função* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$*, definida por*

$$\varphi(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{se } n \text{ for par} \\ -\frac{n-1}{2}, & \text{se } n \text{ for ímpar} \end{cases}$$

é bijetiva.

Exercício 1.16. *Mostre que* $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$*, definida por*

$$h(n) = \begin{cases} n+1, & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ n-1, & \text{se } n \text{ é par,} \end{cases}$$

é bijetiva.

Exercício 1.17. *Mostre que a função* $f : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$*, definida por* $f(n) = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$*, onde* $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ *é a parte inteira de* $\frac{n}{3}$*, é sobrejetiva, mas não é injetiva.*

Definição 1.13. (*A composta de duas funções*) *Dados os conjuntos* S*,* T *e* U*, sejam* $f : S \to T$ *e* $g : T \to U$ *duas funções. A* composta *de* g *com* f*, denotada por* $g \circ f$*, é a função* $g \circ f : S \to U$*, definida por* $(g \circ f)(x) = g(f(x))$*.*

No curso de Fundamentos de Análise II falaremos com mais detalhes sobre a composição de funções; para este curso basta o aluno saber a definição dada acima.

Teorema 1.3. *Sejam S, T, U conjuntos, $f : S \to T$ e $g : T \to U$ funções.*

(a) *Se f e g forem injetivas, então a composta $g \circ f$ é injetiva.*
(b) *Se f e g forem sobrejetivas, então a composta $g \circ f$ é sobrejetiva.*
(c) *Se f e g forem bijetivas, então a composta $g \circ f$ é bijetiva.*

Prova. Suponha que f e g sejam injetivas. Sejam $x, y \in S$ e $x \neq y$. Como f e g são injetivas, temos $f(x) \neq f(y)$, como g é injetiva, temos $g(f(x)) \neq g(f(y))$, o que mostra que $g \circ f$ é injetiva.

Suponha que f e g sejam sobrejetivas. Dado arbitrariamente $y \in U$, mostraremos que existe x em S, tal que $f(g(x)) = y$. De fato, como g é sobrejetiva, dado $y \in U$, existe $z \in T$, tal que $g(z) = y$. Como f é sobrejetiva, existe $x \in S$, tal que $f(x) = z$. Então, $g(f(x)) = g(z) = y$, portanto, $g \circ f$ é sobrejetiva.

O item (c) segue de (a) e (b), por quê? $\square$

2 Conjuntos enumeráveis e conjuntos não enumeráveis

AULA2: CONJUNTOS ENUMERÁVEIS E CONJUNTOS NÃO ENUMERÁVEIS

OBJETIVOS
Ao final dessa aula, o aluno deverá ser capaz de:
1. Compreender os conceitos de conjunto enumerável e não enumerável e de cardinalidade de um conjunto.
2. Saber provar que os conjuntos dos números naturais, dos números inteiros e dos números racionais são enumeráveis.
3. Saber dar exemplos de conjuntos não enumeráveis.

2.1 Conjunto finito e cardinalidade

Definição 2.1. *Dizemos que um conjunto A é finito, se ele contém um número finito de elementos. Dado um número inteiro positivo n, dizemos que A tem n elementos, se existir uma bijeção*

$$\varphi : \{1, 2, \ldots, n\} \to A.$$

Portanto, podemos escrever

$$A = \{a_1, \ldots, a_n\},$$

onde $a_i = \varphi(i)$. Se um conjunto não for finito, dizemos que ele é infinito.

Definição 2.2. *Dado um conjunto finito A, chamamos de cardinalidade de A, denotada por $|A|$, o número de elementos de A.*

Exemplo 2.1. *Por exemplo, se $A = \{a, b, c\}$, então $|A| = 3$.*

Sejam A e B conjuntos finitos. As afirmações abaixo seguem imedidatamente da definição de cardinalidade.

(a) Se $B \subset A$, então $|B| \leq |A|$.
(b) Se A e B forem disjuntos, então

$$|A \cup B| = |A| + |B|. \tag{2.1}$$

(c) $|A \times B| = |A| \,.\, |B|$.

Definição 2.3. *Se um conjunto for infinito, dizemos que a sua cardinalidade é infinita, em particular os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ têm cardinalidades infinitas.*

Teorema 2.1. *Sejam A e B dois conjuntos finitos, então $|A| = |B|$ se, e somente se, existir uma bijeção $f : A \to B$.*

Prova. Suponha que $|A| = |B| = n$, mostraremos que existe uma bijeção $f : A \to B$. Podemos escrever $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ e $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$, onde $a_i \neq a_j$ e $b_i \neq b_j$, para todo $i \neq j$. Seja $f : A \to B$ definida por $f(a_i) = b_i$, para $i = 1, \ldots, n$. Então f é bijetiva, por quê?

Suponha que exista uma bijeção $f : A \to B$. Mostraremos que $|A| = |B|$. Sejam $|A| = m$ e $|B| = n$, podemos escrever $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ e $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$. Note que $f(a_i) \in B$, para todo i, e como f é injetiva, $f(a_i) \neq f(a_j)$, para todo $i \neq j$. Portanto B tem pelo menos m elementos, ou seja,

$$|B| \geq |A|.$$

Como f é sobrejetiva, para todo $b \in B$ existe pelo menos um $a \in A$, tal que $f(a) = b$. Como f é injetiva, existe no máximo um $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Portanto, como f é bijetiva, para todo $b \in B$ existe exatamente um $a \in A$, tal que $f(a) = b$, isto nos permite definir uma função $g : B \to A$, tal que $g(b) = a$, onde $f(a) = b$. A função g é bijetiva, por quê? Seja $c_i = g(b_i)$, então $c_i \in A$, para $i = 1, \ldots, n$, como g é injetiva, então $c_i \neq c_j$, para $i \neq j$, portanto A tem pelo menos n elementos, ou seja,

$$|A| \geq B.$$

Das desigualdades $|B| \geq |A$ e $|A| \geq |B|$, concluimos que $|A| = |B|$. $\square$

Exercício 2.1. *Seja $A = \{-1, 2, 0, 6\}$. Dê um exemplo de uma função injetiva do conjunto A nele mesmo. Observe que a sua função é sobrejetiva.*

Independentemente da função injetiva que o aluno tenha considerado no exercício anterior, ela necessariamente é sobrejetiva e isto é uma consequência da próxima proposição.

Proposição 2.1. *Se A for um conjunto finito, então qualquer função injetiva $\varphi : A \to A$ é sobrejetiva.*

Prova. Seja n o número de elementos do conjunto A. Quando $n = 1$, a proposição é verdadeira, pois se A possui apenas um elemento, digamos, $A = \{a\}$, então a única função $\varphi : A \to A$, é $\varphi(a) = a$, que é claramente e injetiva e sobrejetiva.

Suponha que tenhamos provado que a proposição seja verdadeira para qualquer conjunto com β elementos. Seja A um conjunto qualquer com $\beta + 1$ elementos e $\varphi : A \to A$, uma função injetiva. Suponha que φ não fosse sobrejetiva, mostraremos que isto nos levaria a um absurdo. De fato, se φ não fosse sobrejetiva, existiria algum elemento $a \in A$, tal que a não pertence a imagem de φ. Seja

$B = A - \{a\}$ e $\psi : B \to B$, tal que $\psi(y) = \varphi(y)$, para todo $y \in B$. Como φ é injetiva, então ψ também é injetiva, por quê? Sendo ψ injetiva e como B tem β elementos, da hipótese de indução, segue que ψ é sobrejetiva. Como a não está na imagem de φ, então $\varphi(a) \neq a$. Portanto $\varphi(a) \in B$, como ψ é sobrejetiva, existe $b \in B$, portanto, $b \neq a$, tal que $\psi(b) = \varphi(a)$, como $\psi(b) = \varphi(b)$, teríamos $\varphi(b) = \varphi(a)$, o que é uma contradição, pois φ é injetiva. □

Exercício 2.2. *Seja $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definida por $\varphi(n) = n + 1$, esta função é injetiva, mas não é sobrejetiva, pois o número 1 não faz parte da sua imagem. Este é um exemplo de uma função injetiva de um conjunto nele mesmo, que não é sobrejetiva. Isto contraria a Proposição 2.1, por quê?*

2.2 O conjunto $\mathcal{P}(A)$

Definição 2.4. *Dado um conjunto finito A, definimos $\mathcal{P}(A)$ como o conjunto cujos elementos são os subconjuntos de A. Por exemplo, se $A = \{1, 2, 3\}$, então*

$$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

Teorema 2.2. *Seja A um conjunto finito, então*

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}. \tag{2.2}$$

Prova. A demonstração será por indução no número de elementos do conjunto A. Se $|A| = 1$, digamos $A = \{a\}$, então

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}\},$$

logo $|\mathcal{P}(A)| = 2 = 2^1 = 2^{|A|}$, portanto (2.2) é verdadeira para $n = 1$.

Mostraremos que se (2.2) for verdadeira para qualquer conjunto com k elementos, então ela será verdadeira para qualquer conjunto com $k + 1$ elementos e, por indução, concluiremos que (2.2) vale para qualquer conjunto finito A.

Suponha que (2.2) seja verdadeira para qualquer conjunto com k elementos e seja A um conjunto com $k + 1$ elementos, digamos

$$A = \{x_1, \ldots, x_{k+1}\}.$$

Defina $\widetilde{\mathcal{P}}(A)$ como o subconjunto de $\mathcal{P}(A)$ formado por aqueles subconjuntos de A que contêm x_{k+1}. Então $\mathcal{P}(\{x_1, \ldots, x_k\})$ é precisamente o subconjunto de $\mathcal{P}(A)$ formado por aqueles subconjuntos de A que não contém x_{k+1}. Logo

$$\mathcal{P}(\{x_1, \ldots, x_k\}) \cap \widetilde{\mathcal{P}}(A) = \emptyset$$

e

$$\mathcal{P}(\{x_1, \ldots, x_{k+1}\}) = \mathcal{P}(\{x_1, \ldots, x_k\}) \cup \widetilde{\mathcal{P}}(A),$$

portanto, de (2.1), temos

$$|\mathcal{P}(\{x_1, \ldots, x_{k+1}\})| = |\mathcal{P}(\{x_1, \ldots, x_k\})| + \left|\widetilde{\mathcal{P}}(A)\right|.$$

Note que os elementos de $\widetilde{\mathcal{P}}(A)$ são da forma $B \cup \{x_{k+1}\}$, para algum

$$B \in \mathcal{P}(\{x_1, \ldots, x_k\}),$$

portanto $\widetilde{\mathcal{P}}(A)$ e $\mathcal{P}(\{x_1, \ldots, x_k\})$, têm o mesmo número de elementos, ou seja,

$$\left|\widetilde{\mathcal{P}}(A)\right| = |\mathcal{P}(\{x_1, \ldots, x_k\})|.$$

Como $\{x_1, \ldots, x_k\}$ tem k elementos, então pela hipótese de indução,

$$|\mathcal{P}(\{x_1, \ldots, x_k\})| = 2^k,$$

portanto

$$|\mathcal{P}(\{x_1, \ldots, x_{k+1}\})| = 2\ \ |\mathcal{P}(\{x_1, \ldots, x_k\})| = 2\ 2^k = 2^{k+1}$$

e com isso concluimos a demonstração. □

Exemplo 2.2. *Se X e Y são conjuntos, então*

$$\mathcal{P}(X) \cap \mathcal{P}(Y) = \mathcal{P}(X \cap Y) \quad e \quad \mathcal{P}(X) \cup \mathcal{P}(Y) \subset \mathcal{P}(X \cup Y).$$

Prova. Note que

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{P}(X) \cap \mathcal{P}(Y) &\iff A \subset X \text{ } e \text{ } A \subset Y \\ &\iff A \subset X \cap Y \iff A \in \mathcal{P}(X \cap Y). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{P}(X) \cup \mathcal{P}(Y) &\iff A \subset X \text{ } ou \text{ } A \subset Y \\ &\iff A \subset X \cup Y \\ &\iff A \in \mathcal{P}(X \cup Y). \end{aligned}$$

□

Lema 2.1. *Se A for um conjunto infinito, então existe uma função injetiva $\varphi : A \to A$, que não é sobrejetiva.*

Prova. Se A for infinito, nenhuma lista finita de elementos $a_1, \ldots, a_2, \ldots, a_n$ pode incluir todos os elementos de A. Então existe uma lista infinita $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ de elementos de A que são distintos (ou $a_i \neq a_j$ se $i \neq j$). Seja $\varphi : A \to A$, definida como $\varphi(a_n) = a_{n+1}$, para todo n e $\varphi(x) = x$ para todos os elementos de A que não estão incluidos em $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$. Então φ é uma função injetiva (por quê?), cujo imagem é $A - \{a_1\}$ (por quê?), portanto esta função não é sobrejetiva. □

Proposição 2.2. *Um conjunto A é infinito se, e somente se, existir uma função injetiva $\varphi : A \to A$ que não é sobrejetiva.*

Prova. Se A for infinito então, pelo Lemma 2.1, existe uma função injetiva $\varphi : A \to A$, que não é sobrejetiva.

Por outro lado, a Proposição 2.1 diz que se A for finito, então toda função injetiva $\varphi : A \to A$ é sobrejetiva. Portanto, se existir alguma função injetiva $\varphi : A \to A$ que não seja sobrejetiva, então A é infinito. □

Exercício 2.3. *Dada $f : A \to B$, prove que as afirmações abaixo são verdadeiras.*

(*a*) *Seja f injetiva, se A for infinito, então B é infinito.*
(*b*) *Seja f sobrejetiva, se B for infinito, então A é infinito.*

Resolução. (a) Mostraremos que se B for finito, então A é finito. Se B tem n elementos, então como $f(A) \subset B$, segue-se que $f(A)$ tem no máximo n elementos. Seja k o número de elementos de $f(A)$, então $k \leq n$. Como $f(A)$ tem k elementos, podemos escrever $f(A) = \{b_1, \ldots, b_k\}$. Como f é injetiva, para cada $b_i \in f(A)$ existe exatamente um $a_i \in A$, tal que $f(a_i) = b_i$. Afirmamos que $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$, logo A tem k elementos. De fato, se $a \in A$, então $f(a) = b_i$, para algum $i = 1, \ldots, k$, portanto $a = a_i$, logo $a \in \{a_1, \ldots, a_k\}$, o que mostra que $A \subset \{a_1, \ldots, a_k\}$, por outro lado, por definição, cada $a_i \in A$, logo $\{a_1, \ldots, a_k\} \subset A$. Destas duas inclusões, concluimos que $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$.

(a) Mostraremos que se A for finito, então B é finito. Se A tem n elementos, podemos escrever $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Como $f(A) = \{f(a_1), \ldots, f(a_n)\}$, concluimos que $f(A)$ tem no máximo n elementos. Como f é sobrejetiva, então $B = f(A)$, portanto B tem no máximo n elementos, portanto B é finito. □

Exercício 2.4. *Sejam A um conjunto finito e B um conjunto infinito. Prove que existe uma função injetiva $f : A \to B$ e uma função sobrejetiva $g : B \to A$.*

Resolução. Suponha que A tenha n elementos, então podemos escrever $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Sejam $b_1, \ldots, b_n$, elementos distintos de B. Seja $f : A \to B$ definida por $f(a_i) = b_i$, para $i = 1, \ldots, n$, então f é injetiva. Por outro lado, a função $g : B \to A$ definida por $g(b_i) = a_i$, para $i = 1, \ldots, n-1$ e $f(b) = a_n$, para $b \in B - \{b_1, \ldots, b_{n-1}\}$ é sobrejetiva. □

2.3 Conjuntos enumeráveis

Definição 2.5. *Dizemos que um conjunto A é enumerável, se ele for finito ou se existir uma função bijetiva $\varphi : \mathbb{N} \to A$. A função φ se chama uma enumeração dos elementos de A. Escrevemos*

$$\varphi(1) = a_1,\ \varphi(2) = a_2,\ \ldots,\ \varphi(n) = a_n,\ \ldots$$

portanto

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}.$$

Portanto, se um conjunto A for infinito e enumerável, podemos indexar (rotular) os elementos de A usando com números naturais como índices.

Exemplo 2.3. *Note que o conjunto $\mathbb{N}$ é enumerável, pois a função $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definida por $\varphi(n) = n$ é bijetiva.*

Exemplo 2.4. *O conjunto $\{2, 4, 6, \ldots\}$ é enumerável.*

De fato, o esquema abaixo nos sugere como definir uma função $\varphi : \mathbb{N} \to \{2, 4, 6, 8, \ldots, 2n, \ldots\}$, de modo que ela seja uma bijeção:

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \ldots & n & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \ldots & \downarrow & \ldots \\ 2, & 4, & 6, & 8, & 10, & 12, & 14, & \ldots, & 2n, & \ldots \end{array}.$$

Note que $\varphi(n) = 2n$. A função φ é bijetiva, por quê? □

Exemplo 2.5. *O conjunto $-1, -2, -3, -4, \ldots, -n, \ldots$ é enumerável.*

De fato, o esquema abaixo nos sugere como definir uma função $\varphi : \mathbb{N} \to \{$-1, -2, -3, -4, …, -n, …$\}$ de modo que ela seja uma bijeção:

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \ldots & n & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \ldots & \downarrow & \ldots \\ -1, & -2, & -3, & -4, & -5, & -6, & -7, & \ldots, & -n, & \ldots \end{array}.$$

Note que $\varphi(n) = -n$. A função φ é bijetiva, por quê? □

Exemplo 2.6. *O conjunto dos inteiros*

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

é enumerável.

De fato o esquema abaixo nos sugere como definir uma função $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ de modo que ela seja uma bijeção:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \ldots & 2n & 2n+1 & \ldots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \ldots & \downarrow & \downarrow & \ldots \\
0, & 1, & -1, & 2, & -2, & 3, & -3, & 4, & -4, & \ldots & n & -n & \ldots
\end{array}.$$

Note que φ é definida da seguinte forma $\varphi(1) = 0$, $\varphi(2n) = n$ e $\varphi(2n+1) = -n$. Afirmamos que φ é bijetiva, por quê? □

Teorema 2.3. *Se $A \subset \mathbb{N}$, então A é enumerável.*

Prova. Se A for finito por definição ele é enumerável e não teríamos nada a fazer. Suponha que A seja infinito. Como A é infinito, então A e qualquer subconjunto de A do qual retiramos apenas um número finito de elementos será não vazio. Pelo princípio da boa-ordenação, todo subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$ possui um menor elemento, seja a_1 o menor elemento de A, a_2 o menor elemento de $A_1 = A - \{a_1\}$, a_3 o menor elemento de $A_2 = A - \{a_1, a_2\}$, procedendo desta forma, definimos a_n como o menor elemento de $A_{n-1} = A - \{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$. Como $a_{n+1} > a_n$, a função $\varphi : \mathbb{N} \to A$, definida por

$$\varphi(n) = a_n$$

é injetiva. Para mostrarmos que ela é sobrejetiva, basta mostrarmos que $A = \{a_1, \ldots, a_n, \ldots\}$. Suponha que houvesse algum $a \in A$, tal que $a \neq a_n$, para todo n. Então a pertenceria a A_n para todo n, o que implica que $a > a_n$, para todo n. Portanto a_n seria um número natural maior do que todos os elementos de um conjunto infinito de números naturais $\{a_1, \ldots, a_n, \ldots\}$, o que é impossível. □

Corolário 2.1. *Seja $g : A \to B$ uma bijeção, onde B é um subconjunto de $\mathbb{N}$, então A é enumerável.*

Prova.
Se B for finito, como g é uma bijeção, então A também será finito ($|A| = |B|$ por quê?), portanto enumerável.

Se B for infinito, como ele é enumerável, vimos na demonstração do Teorema 2.3 que existe uma bijeção $\varphi : B \to \mathbb{N}$. Então, pelo Teorema 1.3, $g \circ \varphi : A \to \mathbb{N}$ é uma bijeção, por ser composta de bijeções, portanto, A é enumerável. □

Corolário 2.2. *Seja $f : A \to B$ injetiva. Se B for enumerável, então A também será.*

Prova.
Se B for finito, como f é injetiva, então A também será finito ($|A| \leq |B|$ por quê?), portanto enumerável.
Se B for infinito, como B é enumerável, então existe uma bijeção $\varphi : B \to \mathbb{N}$. Como f e φ são injetivas, então pelo Teorema 1.3, a composta $\varphi \circ f : A \to \mathbb{N}$ também é injetiva. Portanto $\varphi \circ f$ é uma bijeção de A sobre a sua imagem, a qual é enumerável por ser um subconjunto $\mathbb{N}$, isto decorre do Teorema 2.3. Portanto, mostramos que existe uma bijeção de A sobre um subconjunto de $\mathbb{N}$ e pelo Corolário 2.1, temos que A é enumerável. $\square$

Exemplo 2.7. *Mostre que todo subconjunto de um conjunto enumerável é enumerável.*

De fato, seja B um conjunto enumerável e A um subconjunto de B. Considere a função $f : A \to B$ definida por $f(x) = x$. Então f é injetiva e, pelo Corolário 2.2, A também é enumerável. $\square$

Corolário 2.3. *Seja $f : A \to B$ sobrejetiva. Se A for enumerável, então B também será.*

Prova. Como f é sobrejetiva, dado $b \in B$, podemos tomar $a \in A$, tal que $f(a) = b$. Isto permite-nos definir uma função $g : B \to A$, tal que $g(b) = a$, portanto $f(g(b)) = f(a) = b$, para todo $b \in B$. Se $b_1 \neq b_2$, então $g(b_1) \neq g(b_2)$; pois $g(b_1) = g(b_2)$ implicaria $f(g(b_1)) = f(g(b_2))$, o que seria um absurdo, pois $f(g(b_1)) = b_1$ e $f(g(b_2)) = b_2$ e, por hipótese, $b_1 \neq b_2$. Logo, g é injetiva e A é enuméravel, então pelo Corolário 2.2 B é enumerável. $\square$

Exemplo 2.8. *O produto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável.*

De fato, apresentaremos duas maneiras para mostrar o resultado acima.

A primeira maneira é a seguinte: disponha os elementos de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ na forma abaixo (na n-ésima linha colocamos todos os elementos do produto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, cuja primeira coordenada é n, ou seja, elementos da forma (n, j), onde $j = 1, 2, \ldots$):

$$
\begin{array}{cccccccccc}
(1,1) & \longrightarrow & (1,2) & & (1,3) & \longrightarrow & (1,4) & & (1,5) & \ldots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \\
(2,1) & & (2,2) & & (2,3) & & (2,4) & & (2,5) & \ldots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \\
(3,1) & & (3,1) & & (3,3) & & (3,4) & & (3,5) & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \\
(4,1) & & (4,2) & & (4,3) & & (4,4) & & (4,5) & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \\
(5,1) & & (5,2) & & (5,3) & & (5,4) & & (5,5) & \cdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}
$$

A partir do elemento $(1,1)$ seguimos as setas para obter o elemento seguinte:

$$(1,1),(1,2),(2,1),(3,1),(2,2),(1,3),(1,4),(2,3),\ldots. \tag{2.3}$$

Com isso definimos $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, de modo que ela leva o n-ésimo elemento de (2.3) no número inteiro positivo n. Claramente a função φ é injetiva, portanto, pelo Corolário 2.2, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável.

A segunda maneira é a seguinte: seja $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definida por $\varphi(m,n) = 2^m.3^n$. Pela unicidade da decomposição de um número inteiro positivo em fatores primos, φ é injetiva e pelo Corolário 2.2, segue que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável. □

Note que na definição de φ na segunda demonstração poderíamos ter tomado dois primos quaisquer, ao invés de 2 e 3.

Exemplo 2.9. *O produto cartesiano de dois conjuntos enumeráveis é enumerável.*

De fato, sejam A e B dois conjuntos enumeráveis, então existem bijeções $f : \mathbb{N} \to A$ e $g : \mathbb{N} \to B$. Defina $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to A \times B$, dada por $\varphi(m,n) = (f(m), g(n))$. Como f e g são sobrejetivas, então φ também será sobrejetiva. Sendo φ sobrejetiva e $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ enumerável, pelo Corolário 2.3, concluimos que $A \times B$ é enumerável. □

Corolário 2.4. *A união enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável.*

Prova. Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ conjuntos enumeráveis, então existem bijeções $f_1 : \mathbb{N} \to A_1$, $f_2 : \mathbb{N} \to A_2$, $\ldots$, $f_n : \mathbb{N} \to A_n$, $\ldots$. Seja $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, defina $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to A$, fazendo $f(m,n) = f_n(m)$, então f é sobrejetiva, pois dado $a \in A$, então $a \in A_n$ para algum n, portanto, $a = f_n(m) = f(m,n)$, para algum m. Sendo f sobrejetiva e como $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável, então pelo Corolário 2.3, concluimos que A é enumerável. □

Exemplo 2.10. *O conjunto*

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$$

é enumerável.

De fato, seja $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$, então sendo $\mathbb{Z}^*$ um subconjunto de $\mathbb{Z}$ que é enumerável, ele é enumerável. Por outro lado $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, sendo o produto de dois conjuntos enumeráveis, ele é enumerável. A função $\varphi : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \to \mathbb{Q}$, definida por

$$\varphi(m,n) = \frac{m}{n}$$

é sobrejetiva, pelo Corolário 2.3, concluimos que $\mathbb{Q}$ é enumerável. □

Definição 2.6. *Dados dois conjuntos A e B, dizemos que eles têm a mesma cardinalidade se, e somente se, existir uma bijeção entre eles. Em particular, os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$, têm a mesma cardinalidade.*

2.4 Conjuntos não enumeráveis

Definição 2.7. *Um conjunto que não é enumerável é dito ser não enumerável.*

Muitos conjuntos que aparecem em matemática são não enumeráveis.

Exemplo 2.11. (*Um exemplo de conjunto não enumerável*) *Seja A o conjunto de todas as funções $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$, então A é não enumerável.*

De fato, se A fosse enumerável, então poderíamos escrever

$$A = \{f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots\},$$

onde para cada $i \in \mathbb{N}$, f_i é uma função de $\mathbb{N}$ em $\{0, 1\}$. Em particular, dado arbitrariamente uma função $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$, então deveríamos ter $f = f_i$, para algum $i \in \mathbb{N}$. Mostraremos a seguir que existe uma função $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$, tal que

$$f \neq f_i, \quad \text{para todo } i \in \mathbb{N}, \tag{2.4}$$

o que nos levaria a um absurdo. Este absurdo surgiu da nossa hipótese de A ser enumerável, com isso concluiremos que A é não enumerável.
A seguir mostraremos (2.4). De fato, para cada $i \in \mathbb{N}$ defina

$$f(i) = \begin{cases} 0, & \text{se } f_i(i) = 1 \\ 1, & \text{se } f_i(i) = 0 \end{cases},$$

então por construção temos $f(1) \neq f_1(1), f(2) \neq f_2(2), \ldots, f(i) \neq f_i(i), \ldots$ Dado $i \in \mathbb{N}$, como $f(i) \neq f_i(i)$, então f e f_i diferem pelo menos no ponto i, portanto $f \neq f_i$. □

Observação 2.1. *Na Seção 6.2 mostraremos que o conjunto dos números reais é não enumerável.*

Exemplo 2.12. *Assumindo que os reais são não enumeráveis, mostraremos que o conjunto dos irracionais, $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$, é não enumerável.*

De fato, sabemos que $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ como $\mathbb{Q}$ é enumerável, se $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ também fosse enumerável, sendo a união de dois conjuntos enumeráveis enumerável, então concluiríamos que $\mathbb{R}$ seria enumerável, o que seria falso, tendo em vista a Observação 2.1. □

Como o conjunto $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ dos irracionais é não enumerável, segue-se que, em termos de cardinalidade, existem muitos mais números irracionais do que racionais.

Exercício 2.5. *Assumindo que* $\mathbb{R}$ *seja não enumerável, mostre que o intervalo* $(-1, 1)$ *é não enumerável.*
Sugestão: *Mostre que a função* $f : \mathbb{R} \to (0, 1)$*, definida por* $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ *é injetiva e use o Corolário* 2.2.

Proposição 2.3. *Dado um conjunto* A*, não existe uma função sobrejetiva* $f : A \to \mathcal{P}(A)$.

Prova. Seja $f : A \to \mathcal{P}(A)$ uma função qualquer, mostraremos que f não é sobrejetiva, ou seja, mostraremos que existe algum subconjunto de A, denotado por Z_f, tal que $Z_f \neq f(x)$, para todo $x \in A$. Afirmamos que

$$Z_f = \{x \in A : x \notin f(x)\}$$

tem as propriedades desejadas. De fato, dado $x_o \in A$, temos uma das seguinte possibilidades: (i) $x_o \in f(x_o) \implies x_o \notin Z_f$, logo, $f(x_o) \neq Z_f$, ou (ii) $x_o \notin f(x_o) \implies x_o \in Z_f$, logo, $f(x_o) \neq Z_f$. $\square$

Corolário 2.5. *O conjunto* $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ *é não enumerável.*

Prova. Se $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ fosse enumerável, então existiria uma função bijetiva $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$, sendo f bijetiva, ela é sobrejetiva, o que contrariaria a Proposição 2.3. $\square$

2.5 Exercícios

Exercício 2.6. *O conjunto dos números primos* $\{2,3,5,7,11,13,17,\dots\}$ *é enumerável, por quê?*

Exercício 2.7. *O conjunto dos números inteiros ímpares* $\{1,3,5,7,9,\dots\}$ *é enumerável?*

Exercício 2.8. *O conjunto* $\{1,1/2,1/3,1/4,1/5,\dots\}$ *é enumerável?*

Exercício 2.9. *O conjunto* $\mathbb{Q}^3 = \{(x,y,z) \,:\, x,y,z \in \mathbb{Q}\}$ *é enumerável?*

Exercício 2.10. *Sejam* A *e* B *conjuntos disjuntos enumeráveis e infinitos. Então existem bijeções* $f : \mathbb{N} \to A$ *e* $g : \mathbb{N} \to B$*. Defina*

$$h(n) = \begin{cases} f(\frac{n}{2}), & \text{se } n \text{ for par} \\ g(\frac{n+1}{2}), & \text{se } n \text{ for ímpar} \end{cases}.$$

Mostre que h *é bijetiva e conclua que* $A \cup B$ *é enumerável.*

Exercício 2.11. *Sejam* A *e* B *conjuntos e* B *não enumerável. Prove que se existir uma função sobrejetiva de* A *em* B*, então* A *é não enumerável.*

Exercício 2.12. *Suponha que* $n \in \mathbb{N}$ *e* $f : \{1,2,\dots,n\} \to \{1,2,\dots,n\}$*. Mostre que* f *é injetiva se, e somente se,* f *for sobrejetiva.*

Exercício 2.13. *Decida quais das afirmações abaixo são verdadeiras e quais são falsas. Prove as verdadeiras e dê contra-exemplos para as falsas.*

(a) Seja E *um conjunto. Se existir uma função sobrejetiva* f *de* E *em* $\mathbb{N}$*, então* E *é enumerável.*

(b) Um racional diádico é da forma $n/2^m$*, para algum* $n \in \mathbb{Z}$ *e* $m \in \mathbb{N}$*. O conjunto dos racionais diádicos é não enumerável.*

(c) Suponha que A *e* B *sejam conjuntos e que* $f : A \to B$ *seja injetiva. Se* A *for não enumerável, então* B *é não enumerável.*

(d) O conjunto das partes $\mathbb{Z}$*,* $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$*, é enumerável.*

(e) Sejam A *e* B *conjuntos, onde* B *não enumerável. Então* $A \cap B$ *e* $A \cup B$ *são não enumeráveis.*

(f) Sejam E_1*,* E_2*, ..., conjuntos finitos e*

$$E = E_1 \times E_2 \times E_3 \times \dots = \{(x_1, x_2, x_3, \dots) \,:\, x_i \in E_i, i \in \mathbb{N}\},$$

então E *é não enumerável.*

3 Os números racionais

AULA3: OS NÚMEROS RACIONAIS

OBJETIVOS

Ao final dessa aula, o aluno deverá ser capaz de:
1. Compreender o conceito de classes de equivalência.
2. Compreender a construção dos números racionais a partir dos números inteiros, usando o conceito de classes de equivalência.
3. Transformar uma representação decimal de um número racional em uma fração.
4. Dar exemplos de números que não são racionais.

3.1 Relações de equivalência

Definição 3.1. *Uma relação binária R sobre um conjunto não vazio A é um subconjunto não vazio de $A \times A$. Se $(a, b) \in R$, dizemos que a está relacionado (ou R-relacionado) a b e escrevemos $a\,R\,b$. Se $(a, b) \notin R$, dizemos que a e b não estão relacionados e denotamos $a \not R\, b$.*

Exemplo 3.1. *Sejam $A = \{a, b, c\}$ e $R = \{(a, a), (b, a), (c, c)\}$. Então $a\,R\,a$, $b\,R\,a$ e $c\,R\,c$. Por outro lado, os pares ordenados (a, b) e (b, b) não estão em R, portanto $a \not R\, b$ e $b \not R\, b$.*

Exemplo 3.2. *Seja $A = \{a, b, c\}$ e R definida por $x\,R\,y$ se, e somente se, $x = y$. Então*

$$R = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}.$$

Definição 3.2. *Seja A um conjunto não vazio e R uma relação binária sobre A. Dizemos que*

(i) *R é* reflexiva *se para todo $x \in A$, temos xRx.*

(ii) *R é* simétrica *se para quaisquer $x, y \in A$, se xRy, então yRx.*

(iii) *R é* transitiva *se para quaisquer $x, y, z \in A$, se xRy e yRz, então xRz.*

(iv) *R é uma* relação de equivalência *se ela satisfizer as propriedades (i), (ii) e (iii), ou seja, se ela for reflexiva, simétrica e transitiva.*

Exercício 3.1. *Seja R a relação em $\mathbb{Z}$ definida por xRy se, e somente se $x = y$. Mostre que R é uma relação de equivalência.*

Exemplo 3.3. *Considere o conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros e a relação R, tal que xRy se, e somente se, $x - y$ for múltiplo de 3. Mostraremos que R é uma relação de equivalência.*

De fato, por definição xRy se, e somente se, $x - y = 3k$, onde k é um inteiro. Em particular, $x - x = 0 = 3.0$ e, portanto, R é reflexiva. Por outro lado, se xRy, então $x - y = 3k$, logo $y - x = -3k = 3(-k)$ e concluimos que R é simétrica. Finalmente, se xRy e yRz, então $x - y = 3k_1$ e $y - z = 3k_2$, então $x - z = (x - y) + (y - z) = 3k_1 + 3k_2 = 3(k_1 + k_2)$, portanto, xRz, o que mostra que R é transitiva. Sendo R reflexiva, simétrica e transitiva, então R é uma relação de equivalência. □

Se R for uma relação de equivalência sobre A, dado $a \in A$, definimos

$$\overline{a} = \{x \in A \,:\, xRa\}, \tag{3.1}$$

como sendo a *classe de equivalência do elemento a* relativa à relação R.

Note que em virtude da propriedade reflexiva, aRa, portanto $a \in \overline{a}$, logo $\overline{a} \neq \emptyset$. Com isso toda classe de equivalência é não vazia.

Se aRb, então de (3.1), temos

$$a \in \overline{b}.$$

Além disso, se aRb, pela propriedade simétrica, bRa e de (3.1) concluimos que

$$b \in \overline{a}.$$

Logo, se aRb, temos $b \in \overline{a}$ e $a \in \overline{b}$.

Afirmamos que se aRb se e, somente se,

$$\overline{a} = \overline{b}.$$

De fato, seja $x \in \overline{a}$, então xRa, logo temos xRa e aRb. Em virtude da transitividade, temos xRb, o que implica que $x \in \overline{b}$, logo todo elemento de $\overline{a}$ está em $\overline{b}$. Portanto

$$\overline{a} \subset \overline{b}.$$

Analogamente, trocando-se os papéis de a e b, concluimos que

$$\overline{b} \subset \overline{a}.$$

Mostramos que $\overline{a} \subset \overline{b}$ e $\overline{b} \subset \overline{a}$, o que significa que $\overline{a} = \overline{b}$.

Afirmamos que se $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$, então $\overline{a} = \overline{b}$. De fato, se $x \in \overline{a} \cap \overline{b}$, então $x \in \overline{a}$ e $x \in \overline{b}$, o que implica que xRa e xRb, mas xRa implica aRx. Portanto, temos aRx e xRb, logo pela propriedade transitiva, temos aRb, mas vimos que isto implica

$$\overline{a} = \overline{b}.$$

Portanto, duas classes de equivalência ou são iguais ou são disjuntas.

Mostraremos que

$$A = \cup_{a \in A} \overline{a}.$$

Por definição cada classe de equivalência é um subconjunto de A, portanto

$$\cup_{a \in A} \overline{a} \subset A. \tag{3.2}$$

Dado $a \in A$, vimos que $a \in \overline{a}$, portanto, $a \in \cup_{x \in A} \overline{x}$, o que mostra que

$$A \subset \cup_{a \in A} \overline{a}. \tag{3.3}$$

Das inclusões (3.2) e (3.3) concluimos que $A = \cup_{a \in A} \overline{a}$.

Em resumo, mostramos que uma relação de equivalência R num conjunto não vazio A o decompõe numa união disjunta de classes de equivalência.

O conjunto

$$\{\overline{a} \, : \, a \in A\}$$

é chamado de *quociente de A pela relação R* e é denotado por A/R, isto é

$$A/R = \{\overline{a} \, : \, a \in A\}.$$

Exemplo 3.4. *Seja R a relação em $\mathbb{Z}$ definida por xRy se, e somente se, $x - y$ for múltiplo de 3. Mostraremos que*

$$\mathbb{Z}/R = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}.$$

De fato, dado um número inteiro x, o resto da sua divisão por 3 só pode ser 0, 1 ou 2, portanto, podemos escrever $x = 3k + r$, onde r é igual a 0, 1 ou 2. Logo $x - r = 3k$, o que implica que xRr, portanto x está na classe de equivalência de r. Então, temos apenas as três classes de equivalências $\overline{0}$, $\overline{1}$ e $\overline{2}$. Logo

$$\mathbb{Z}/R = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}.$$

Na classe de equivalência $\overline{r}$ estão todos os inteiros cujo resto da divisão por 3 é r, onde $r = 0, 1, 2$. □

Exercício 3.2. *Encontre $\overline{17}$, onde R é a relação de equivalência do exemplo anterior.*

Exercício 3.3. *Em* $\mathbb{Z}$ *definimos a seguinte relação:* aRb *se, e somente se,* $a+b$ *for par.*

(i) *Mostre que* R *é uma relação de equivalência.*

(ii) *Encontre* $\mathbb{Z}/R$.

(iii) *Quais são os elementos de* $\overline{1111}$*?*

Exemplo 3.5. *Seja* $\mathbb{Z}^*$ *o conjunto de todos os inteiros não nulos. Dados* (a,b) *e* (c,d) *em* $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$*, dizemos que* $(a,b)R(c,d)$ *se, e somente se* $ad=bc$*. Mostraremos que* R *é uma relação de equivalência.*

De fato, neste exemplo, o que faz o papel do conjunto A na definição de relação binária dada na Definição 3.1 é o conjunto $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$, lembre-se que cada elemento de A é um par ordenado.

Mostraremos que a relação R é reflexiva, simétrica e transitiva.

(i) Para todo $(a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$, temos $(a,b)R(a,b)$, visto que $ab=ba$, pois a multiplicação de inteiros é comutativa. Portanto, a relação R é reflexiva.

(ii) Sejam agora $(a,b),(c,d)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$, tais que $(a,b)R(c,d)$; então $ad=bc$ e logo $cb=da$, o que implica que $(c,d)R(a,b)$. Portanto, a relação R é simétrica.

(iii) Sejam $(a,b),(c,d),(e,f)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$, tais que $(a,b)R(c,d)$ e $(c,d)R(e,f)$; então $ad=bc$ e $cf=de$. Multiplicando a primeira igualdade por f e a segunda por b, temos $(ad)f=(bc)f$ e $b(cf)=b(de)$, portanto $(af)d=(be)d$, como $d\neq 0$, pois é a segunda componente do par, podemos dividir a equação por d e obtemos $af=be$, ou seja, $(a,b)R(e,f)$, o que mostra que R é transitiva. $\square$

3.2 A construção do conjunto dos números racionais

Se a e b são números inteiros com $b\neq 0$, a equação $bx=a$ nem sempre tem solução em $\mathbb{Z}$, a menos que a seja um múltiplo de b. Por exemplo, não existe número inteiro x, tal que $2x=3$. Para contornarmos esta situação definiremos um novo conjunto no qual a operação de divisão é fechada, ou seja, a equação $bx=a$ sempre tem solução, que no Ensino Fundamental é indicada pela fração $\frac{a}{b}$.

No Ensino Fundamental, aprendemos que as frações $\frac{5}{15}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{-4}{-12}$ e $\frac{1}{3}$ são todas iguais. Se olharmos para os pares ordenados nos quais as abscissas e as ordenadas são o numeradores e os denominadores da frações correspondentes, ou seja, $(5, 15)$, $(2, 6)$, $(-4, -12)$ e $(1, 3)$, então para quaisquer dois destes pares, o produdo da abscissa do primeiro par com a ordenada do segundo par é igual ao produto da ordenada do primeiro par ordenado com a abscissa do segundo par ordenado. Ou seja, as frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ são iguais se, e somente se, os pares ordenados (a, b) e (c, d) satisfizerem $ad = bc$. Em particular, fixado um par ordenado (a, b) em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, então todos os pares ordenados (c, d) em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, tais que $ad = bc$, são representantes da mesma fração, ou seja, $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$.

A discussão acima nos motiva definir em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ a seguinte relação: $(a, b)R(c, d)$ se, e somente se, $ad = bc$. Vimos no Exemplo 3.5 que tal relação é uma relação de equivalência, logo ela divide $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ em classes de equivalência disjuntas. A classe de equivalência de (a, b), ou seja,

$$\begin{aligned} \overline{(a, b)} &= \{(u, v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \; : \; (u, v)R(a, b)\} \\ &= \{(u, v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \; : \; av = bu\}, \end{aligned}$$

é que chamaremos de número racional $\frac{a}{b}$.

Qualquer elemento da classe de equivalência $\frac{a}{b}$ se diz um *representante* da mesma. Em particular os pares $(5, 15)$, $(2, 6)$, $(-4, -12)$ e $(1, 3)$ são representantes da classe $\frac{1}{3}$. Analogamente, os pares $(-1, -2)$, $(3, 6)$, $(50, 100)$ e $(1, 2)$ são representantes da classe $\frac{1}{2}$.

Definição 3.3. *Denotaremos por $\mathbb{Q}$ o conjunto de todas as classes de equivalências em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, isto é*

$$\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)/R.$$

Os elementos de $\mathbb{Q}$ são chamados de números racionais.

3.3 A soma de números racionais

Note que para definirmos a soma de números racionais teremos que definir a soma de classes de equivalência em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. Antes porém, definiremos a operação de soma em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. Dados (a, b) e (c, d) em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, qual seria a maneira natural de definirmos a sua soma destes dois pares? Para respondermos esta pergunta, lembremos que no Ensino Fundamental aprendemos que

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

Portanto, é natural definirmos

$$(a, b) + (c, d) = (ad + bc, bd); \tag{3.4}$$

esta operação envolve apenas a soma e a multiplicação de inteiros, as quais tomaremos como ponto de partida na construção dos números racionais.

Exemplo 3.6. *Considere os racionais* $\overline{(1,2)}$ *e* $\overline{(1,3)}$. *Tomemos um representante de cada um destes racionais, digamos* $(-2,-4)$ *e* $(2,6)$. *Se os somarmos usando a regra (3.4), encontramos*

$$(-2,-4) + (2,6) = (-20,-24).$$

Se tomarmos outros representantes de $\overline{(1,2)}$ *e* $\overline{(1,3)}$, *digamos* $(2,4)$ *e* $(-1,-3)$, *somando-os usando a regra (3.4), temos*

$$(2,4) + (-1,-3) = (-10,-12).$$

Embora os pares $(-20,-24)$ *e* $(-10,-12)$ *sejam diferentes, eles estão na mesma classe de equivalência. Será que isto foi uma coincidência?*

A seguir mostraremos que o que aconteceu no exemplo anterior não foi uma coincidência, ou seja, dados dois racionais $\overline{(a,b)}$ e $\overline{(c,d)}$, se $(p,q)R(a,b)$ e $(u,v)R(c,d)$, então $(a,b)+(c,d)$ e $(p,q)+(u,v)$ estão na mesma classe de equivalência, ou seja, $(pv+qu,qv)R(ad+bc,bd)$, ou equivalentemente,

$$(pv+qu)(bd) = (qv)(ad+bc).$$

De fato, tendo em vista as propriedades da soma e multiplicação dos inteiros e que $aq = bp$ e $cv = du$, pois estamos assumindo que $(p,q)R(a,b)$ e $(u,v)R(c,d)$, então

$$\begin{aligned}(pv+qu)(bd) &= (bp)(vd) + (bq)(du)\\ &= (aq)(vd) + (bq)(cv)\\ &= (qv)(ad+bc).\end{aligned}$$

□

O fato da soma (3.4) não depender dos representantes de $\overline{(a,b)}$ e $\overline{(c,d)}$ que tomamos, nos permitirá definir a soma de elementos de $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*)/_R$, ou seja, de racionais. Dados dois racionais $\overline{(a,b)}$ e $\overline{(c,d)}$, definimos

$$\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} = \overline{(ad+bc,bd)}. \tag{3.5}$$

Note que o que fizemos acima foi o seguinte: tomamos um representante em cada uma das classes de equivalência $\overline{(a,b)}$ e $\overline{(c,d)}$, por exemplo, os pares (a,b) e (c,d), somando-os usando a regra (3.4) e tomando a classe de equivalência da soma obtida.

De (3.5) temos a seguinte regra para a soma de dois racionais:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} = \overline{(ad+bc,bd)} = \frac{ad+bc}{bd}. \tag{3.6}$$

Exemplo 3.7. *Encontraremos a soma dos números racionais* $\overline{(-3,-6)}$ *e* $\overline{(3,4)}$.

De fato, tomando um representante de cada um dos racionais acima, digamos, $(-3,-6)$ e $(3,4)$, somando-os usando a regra (3.4) e obtemos

$$(-3,-6)+(3,4)=(-30,-24),$$

portanto

$$\overline{(-3,-6)}+\overline{(3,4)}=\overline{(-30,-24)}=\overline{(5,4)},$$

na última linha usamos que $(-30,-24)R(5,4)$. Usando a terminologia usual, temos

$$\frac{-3}{-6}+\frac{3}{4}=\frac{-30}{-24}=\frac{5}{4}.$$

Teorema 3.1. *A soma em* $\mathbb{Q}$ *tem as propriedades abaixo.*

(***Associativa***) *Dados* $x,y,z\in\mathbb{Q}$, *temos*

$$x+(y+z)=(x+y)+z. \tag{3.7}$$

(***Existência do elemento neutro***) *Existe um único elemento, que chamaremos de zero e denotaremos por* 0, *tal que*

$$x+0=x, \tag{3.8}$$

para todo $x\in\mathbb{Q}$.
(***Existência do simétrico***) *Para cada racional* x, *existe um único elemento, chamado de simétrico de* x, *denotado por* $-x$, *tal que*

$$x+(-x)=0. \tag{3.9}$$

(***Comutativa***) *Dados* $x,y\in\mathbb{Q}$, *temos*

$$x+y=y+x. \tag{3.10}$$

Prova. Para provarmos as propriedades acima, usaremos as propriedades das operações de soma e de multiplicação de inteiros.
A seguir mostraremos a propriedade associativa, para tal sejam $x=\overline{(a,b)}$, $y=\overline{(c,d)}$ e $z=\overline{(p,q)}$. Então temos

$$\begin{aligned}
x+(y+z) &= \overline{(a,b)}+\left(\overline{(c,d)}+\overline{(p,q)}\right)\\
&= \overline{(a,b)}+\overline{(cq+dp,dq)}\\
&= \overline{(a(dq)+b(cq+dp),b(dq))}\\
&= \overline{((ad+bc)q+(bd)p,(bd)q)}\\
&= \overline{(ad+bc,bd)}+\overline{(p,q)}\\
&= \left(\overline{(a,b)}+\overline{(c,d)}\right)+\overline{(p,q)}\\
&= (x+y)+z.
\end{aligned}$$

A seguir mostraremos a existência do elemento neutro. Seja

$$0 = \overline{(0,d)},$$

onde $d \in \mathbb{Z}^*$. Dado $x \in \mathbb{Q}$, seja $x = \overline{(a,b)}$, então temos

$$x + 0 = \overline{(a,b)} + \overline{(0,d)} = \overline{(ad + b0, bd)} = \overline{(ad, bd)} = \overline{(a,b)} = x.$$

A seguir mostraremos a existência do simétrico. Dado $x \in \mathbb{Q}$, seja $x = \overline{(a,b)}$, defina

$$-x = \overline{(-a,b)},$$

então

$$\begin{aligned} x + (-x) &= \overline{(a,b)} + \overline{(-a,b)} \\ &= \overline{(ab + b(-a), b^2)} = \overline{(ab - ab, b^2)} = \overline{(0, b^2)} = 0. \end{aligned}$$

Para mostrarmos a propriedade comutativa, dados $x, y \in \mathbb{Q}$ sejam $x = \overline{(a,b)}$ e $y = \overline{(c,d)}$. Então, temos

$$\begin{aligned} x + y &= \overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} = \overline{(ad + bc, bd)} = \overline{(cb + da, db)} \\ &= \overline{(c,d)} + \overline{(a,b)} = y + x. \end{aligned}$$

□

Definição 3.4. (*Subtração de racionais*) *Dados $x, y \in \mathbb{Q}$ definimos*

$$x - y = x + (-y).$$

3.4 O produto de números racionais

Antes de definirmos o produto de racionais, definiremos o produto de dois elementos de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. Dados (a,b) e (c,d) em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, qual seria a maneira mais natural de definirmos o produto deles? Novamente, voltando ao que aprendemos no Ensino Fundamental, temos

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd},$$

portanto, é natural definirmos

$$(a,b) \,.\, (c,d) = (ac, bd). \tag{3.11}$$

Exemplo 3.8. *Considere os racionais $\overline{(1,2)}$ e $\overline{(1,3)}$. Tomemos um representante de cada um destes racionais, digamos $(-2,-4)$ e $(2,6)$. Se os multiplicarmos usando (3.11), encontramos*

$$(-2,-4) \,.\, (2,6) = (-4,-24).$$

Se tomarmos outros representantes de $\overline{(1,2)}$ *e* $\overline{(1,3)}$*, digamos* $(2,4)$ *e* $(-1,-3)$*, multiplicando-os usando (3.11) temos*

$$(2,4)\,.\,(-1,-3) = (-2,-12).$$

Embora os pares $(-4,-24)$ *e* $(-2,-12)$ *sejam diferentes, eles estão na mesma classe de equivalência.*

A seguir mostraremos que o que aconteceu no exemplo anterior não foi uma coincidência, ou seja, dados dois racionais $\overline{(a,b)}$ e $\overline{(c,d)}$, se $(p,q)R(a,b)$ e $(u,v)R(c,d)$, então $(a,b)\,.\,(c,d)$ e $(p,q)\,.\,(u,v)$ estão na mesma classe de equivalência, ou seja, $(ac,bd)R(pu,qv)$, ou equivalentemente,

$$(ac)(qv) = (bd)(pu).$$

De fato, tendo em vista as propriedades da soma e multiplicação dos inteiros e que $aq = bp$ e $cv = du$, pois estamos assumindo que $(p,q)R(a,b)$ e $(u,v)R(c,d)$, temos

$$(ac)(qv) = (qa)(vc) = (pb)(ud) = (bd)(pu).$$

$\square$

O fato do produto (3.11) não depender dos representantes de $\overline{(a,b)}$ e $\overline{(c,d)}$ que tomamos, nos permitirá definir o produto de elementos de $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*)/_R$, ou seja, de racionais. Dados dois racionais $\overline{(a,b)}$ e $\overline{(c,d)}$, definimos

$$\overline{(a,b)}\,.\,\overline{(c,d)} = \overline{(ac,bd)}. \tag{3.12}$$

Note que o que fazemos acima é o seguinte: pegamos um representante em cada uma das classes de equivalência $\overline{(a,b)}$ e $\overline{(c,d)}$, por exemplo os pares (a,b) e (c,d), os multiplicamos usando a regra (3.11) e tomamos a classe de equivalência do resultado obtido.

Portanto, dados dois racionais $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, temos

$$\frac{a}{b}\,.\,\frac{c}{d} = \overline{(a,b)}\,.\,\overline{(c,d)} = \overline{(ac,bd)} = \frac{ac}{bd}. \tag{3.13}$$

Teorema 3.2. *A operação multiplicação em* $\mathbb{Q}$ *possui as seguintes propriedades:*

(***Associativa***) *Dados* $x,y,z\in\mathbb{Q}$*, temos*

$$x(yz) = (xy)z.$$

(***Comutativa***) *Dados* $x,y\in\mathbb{Q}$*, temos*

$$xy = yx. \tag{3.14}$$

(***Existência do elemento neutro***) *Existe um único elemento que chamaremos de unidade e denotaremos por* 1*, tal que para todo* x *em* $\mathbb{Q}$*, temos*

$$1x = x. \tag{3.15}$$

(***Existência de inverso***) *Dado* $x \in \mathbb{Q}$*, com* $x \neq 0$*, existe um único elemento que chamaremos de inverso de* x *e denotaremos por* x^{-1}*, tal que*

$$xx^{-1} = 1. \tag{3.16}$$

Prova. Na demonstração das propriedades acima, usaremos as propriedades da multiplicação dos números inteiros.

A seguir mostraremos a associatividade da soma de racionais. Sejam $x = \overline{(a,b)}$, $y = \overline{(c,d)}$ e $z = \overline{(p,q)}$, então

$$\begin{aligned} x(yz) &= \overline{(a,b)} \,.\, \left(\overline{(c,d)} \,.\, \overline{(p,q)}\right) \\ &= \overline{(a,b)} \,.\, \overline{(cp,dq)} = \overline{(a(cp),b(dq))} \\ &= \overline{((ac)p,(bd)q)} = \left(\overline{(ac,bd)}\right) \overline{(p,q)} \\ &= \left(\overline{(a,b)} \,.\, \overline{(c,d)}\right) \overline{(p,q)} \\ &= (xy)z. \end{aligned}$$

Para mostrar a lei comutativa, note que

$$xy = \overline{(a,b)} \,.\, \overline{(c,d)} = \overline{(ac,bd)} = \overline{(ca,db)} = \overline{(c,a)} \,.\, \overline{(a,b)} = yx.$$

A seguir mostraremos a existência e a unicidade do elemento neutro da multiplicação. Seja

$$1 = \overline{(r,r)},$$

onde $r \in \mathbb{Z}^*$ é arbitrário. Dado $x = \overline{(a,b)}$, temos

$$1x = \overline{(r,r)} \,.\, \overline{(a,b)} = \overline{(ra,rb)} = \overline{(a,b)} = x,$$

o que mostra que 1 é um elemento neutro da multiplicação. Mostraremos que ele é único. De fato, se $1'$ for um racional tal que $1'x = x$, para todo $x \in \mathbb{Q}$, fazendo $x = 1$, temos $1'1 = 1$, mas $11' = 1'$ e em virtude da propriedade comutativa, temos $11' = 1'1$, portanto $1' = 1$, que mostra a unicidade do elemento neutro da multiplicação.

Mostraremos a existência e a unicidade do inverso multiplicativo. Para mostrar a existência, seja $x = \overline{(a,b)} \neq 0$, então $a \neq 0$, logo (b,a) está em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ e, portanto, $\overline{(b,a)}$ é um racional. Note que

$$\overline{(a,b)} \,.\, \overline{(b,a)} = \overline{(ab,ba)} = \overline{(ab,ab)} = 1,$$

portanto $\overline{(b,a)}$ é um inverso multiplicativo de $\overline{(a,b)}$.

Para mostrar a unicidade do inverso multiplicativo, sejam x', x'' racionais, tais que $xx' = 1$ e $xx'' = 1$, então

$$x' = 1x' = x'1 = x'(xx'') = (x'x)x'' = (xx')x'' = 1x'' = x'',$$

o que mostra a unicidade do inverso multiplicativo de x, o qual denotaremos por x^{-1}. $\square$

Definição 3.5. ($\textit{Divisão de racionais}$) *Dados $x, y \in \mathbb{Q}$, com $y \neq 0$, definimos*

$$x \div y = xy^{-1}.$$

Teorema 3.3. ($\textit{Distributividade da multiplicação em relação à soma}$) *Dados $x, y, z \in \mathbb{Q}$, então*

$$x(y+z) = xy + xz.$$

Deixamos a demonstração do teorema acima por conta do aluno.

Exemplo 3.9. *Mostraremos que a equação da forma*

$$ax = b,$$

onde $a, b \in \mathbb{Q}$ e $a \neq 0$, tem uma e somente uma solução em $\mathbb{Q}$.

De fato, observe que $a^{-1}b$ é solução de $ax = b$, pois

$$a(a^{-1}b) = (aa^{-1})b = 1b = b.$$

Suponha que α e β sejam soluções de $ax = b$, então teríamos $a\alpha = b$ e $a\beta = b$, portanto $a\alpha = a\beta$; multiplicando esta equação por a^{-1} e usando a associatividade da multiplicação de racionais, concluimos que $\alpha = \beta$, portanto a solução da equação $ax = b$ é única. $\square$

3.5 Ordem no conjunto dos números racionais

Dado um racional $x \neq 0$, ele possui um representante com denominador positivo, ou seja, existe $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, com $b > 0$, tal que $x = \overline{(a,b)}$. Por exemplo, se $x = \overline{(-1,-2)}$, então $(1,2)$ é um representante de $\overline{(-1,-2)}$, pois $(1,2)R(-1,-2)$. Em geral, basta lembrar que (a,b) e $(-a,-b)$ estão na mesma classe de equivalência e que b ou $-b$ tem que ser positivo.

Dados dois racionais x e y, dizemos que

$$x \geq y,$$

se, e somente se, ao tomarmos representantes (a, b) e (c, d) de x e y, respectivamente, com denominadores positivos, tivermos

$$ad \geq bc.$$

Temos que mostrar que esta definição não depende dos representantes com denominadores positivos de x e y que tomamos. Ou seja, se (p, q) e (u, v) forem outros representantes quaisquer de x e y, respectivamente, com denominadores positivos, então

$$ad \geq bc \tag{3.17}$$

se, e somente se,

$$pv \geq qu. \tag{3.18}$$

De fato, suponha que a desigualdade (3.17) seja verdadeira, então multiplicando-a por qv ela continua verdadeira, pois $qv > 0$, ou seja,

$$(ad)(qv) \geq (bc)(qv).$$

a qual é equivalente a

$$(qa)(dv) \geq (bq)(vc).$$

Como $pb = qa$ e $ud = vc$, pois $(p, q)R(a, b)$ e $(u, v)R(c, d)$, então a desigualdade acima é equivalente a

$$(pb)(dv) \geq (bq)(ud),$$

que é equivalente a

$$(pv)(bd) \geq (qu)(bd).$$

Dividirmos a desigualdade acima por bd, que é positivo, temos

$$pv \geq qu,$$

o que mostra (3.18). De maneira análoga, assumindo (3.18), mostramos (3.17), deixamos os detalhes por conta do aluno (inverta os passos acima). $\square$

Exemplo 3.10. *Mostraremos que*

$$\overline{(-4, -8)} \geq \overline{(2, 6)}.$$

De fato, note que $(4, 8)$ e $(2, 6)$ são representantes de $\overline{(-4, -8)}$ e $\overline{(2, 6)}$, respectivamente, com denominadores positivos. Além disso, $4 \,.\, 6 \geq 8 \,.\, 2$, portanto $\overline{(-4, -8)} \geq \overline{(2, 6)}$. $\square$

Dados dois racionais x e y, dizemos que $x > y$ (ou $y < x$) se, e somente se, $x \geq y$ e $x \neq y$.

Exercício 3.4. *(Densidade dos números racionais) Sejam x, y racionais com $x < y$. Mostre que existe um racional r, tal que $x < r < y$.*

Sugestão. *Sejam $x = \overline{(a,b)}$ e $y = \overline{(c,d)}$, onde b e d são positivos. Mostre que*

$$\overline{(a,b)} < \overline{(ad+bc, 2bd)} < \overline{(c,d)}.$$

Qual é a interpretação geométrica para o racional $\overline{(ad+bc, 2bd)}$?

Exercício 3.5. *Mostre que*

(1) $\overline{(-1,1)} < 0$
(2) *se* $a \neq 0$, *então* $\overline{(a,b)}^{\,2} = \overline{(a,b)} \,.\, \overline{(a,b)} > 0$.

Exercício 3.6. *Mostre que $x^2 = 0$ se, e somente se, $x = 0$.*

3.6 Representação decimal de racionais

Dado um inteiro b, podemos indentificá-lo com o racional

$$\overline{(b,1)}.$$

Portanto, dado racional $\overline{(a,b)}$, tal que $\mathrm{mdc}\{a,b\} = 1$, ou seja, a e b são primos entre si, temos

$$\overline{(a,b)} = \overline{(a,1)} \,.\, \overline{(1,b)} = \overline{(a,1)} \div \overline{(b,1)} = a \div b.$$

Assim, ao dividirmos a por b temos o que chamamos de uma representação decimal para a fração $\frac{a}{b}$. Por exemplo,

$$\frac{7}{20} = 0,35; \ \frac{3}{16} = 0,1875; \ \frac{2}{9} = 0,\overline{2}; \ \frac{5}{22} = 0,22\overline{72}\ldots, \tag{3.19}$$

onde a barra sobre um número indica que ele se repete indefinidamente.

As representações decimais de alguns números racionais são finitas, que terminam, como no primeiro e no segundo exemplos de (3.19). Outros números racionais têm representações infinitas, que não terminam, como no terceiro e no quarto exemplos de (3.19) e são chamadas de *dízimas periódicas*.

Assumiremos que o aluno tenha familiaridade com o conceito de representação decimal infinita. Na Seção 8.5 voltaremos a falar sobre este assunto, quando falaremos sobre a representação decimal de números reais e daremos sentido à representação decimal infinita.

Note que os denominadores das frações em (3.19), cujas as representações decimais são finitas, não possuem nas suas decomposições em fatores primos outros fatores além de 2 e 5, ou seja, $20 = 2^2 . 5$ e $16 = 2^4$. Já as decomposições em fatores primos dos denominadores das frações em (3.19), cujas as representações decimais são infinitas, possuem fatores primos além de 2 e 5, ou seja, $9 = 3^2$ e $22 = 2 . 11$. Será que isto foi uma coincidência?

Teorema 3.4. *Um racional na forma $\frac{a}{b}$, onde a e b são primos entre si e positivos, tem uma representação decimal finita se, e somente se, na decomposição de b em fatores primos não tiver outros fatores além de* 2 *e* 5*.*

Prova. Suponha que $\frac{a}{b}$ tenha uma representação decimal finita, digamos

$$\frac{a}{b} = \alpha, a_1 a_2 \ldots a_n = \frac{\alpha a_1 a_2 \ldots a_n}{10^n}.$$

Equivalentemente, temos

$$10^n a = \alpha a_1 a_2 \ldots a_n \ b.$$

Da relação acima concluimos que $10^n a$ é um múltiplo de b, o que significa que b divide $10^n a$. Como a e b são primos entre si, concluimos que b divide $10^n = 2^n \, 5^n$, logo $b = 2^l \, 5^m$, onde os inteiros l, m satisfazem $0 \leq l, m \leq n$.

Suponha que b seja da forma $2^m . 5^n$, onde m e n são inteiros positivos ou nulos. Se $m \geq n$, temos

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{2^m . 5^n} = \frac{a . 5^{m-n}}{10^m}.$$

Como $m - n \geq 0$, então 5^{m-n} é um número inteiro e, portanto, $k = a . 5^{m-n}$ também é inteiro. Logo

$$\frac{a}{b} = \frac{k}{10^m}$$

e concluimos que a representação decimal é finita, ela tem no máximo m algarismos depois da vírgula. De maneira análoga, se $n \geq m$, mostra-se que a representação decimal é finita, ela tem no máximo n algarismos depois da vírgula. $\square$

Exercício 3.7. *Represente na forma de decimal, as seguintes frações:*

$$\frac{1}{4}, \quad \frac{3}{200}, \quad \frac{7}{625}, \quad \frac{252}{125}, \quad \frac{3147}{2500}, \quad \frac{5}{11}, \quad \frac{3097}{9900}, \quad \frac{209}{700}.$$

Vimos que todo racional da forma $\frac{a}{b}$, onde a e b são primos entre si e positivos, tem uma representação finita ou infinita periódica. Agora mostraremos a recíproca.

Teorema 3.5. *Toda representação decimal finita ou periódica infinita representa um número racional.*

Prova. Toda representação decimal finita representa um racional; por quê? Suponha que $x = a_1a_2 \ldots a_m\overline{b_1 \ldots b_n}$, onde $a_1, \ldots a_m$ representam os m algarismos consecutivos da parte não periódica e $b_1, \ldots, b_n$ representa os n algarismos da parte periódica, ou seja, que se repete. Note que

$$10^{m+n}x = a_1a_2 \ldots a_mb_1 \ldots b_m + 0, \overline{b_1 \ldots b_m}$$

e

$$10^m x = a_1a_2 \ldots a_m + 0, \overline{b_1 \ldots b_m},$$

portanto

$$10^{m+n}x - 10^m x = a_1a_2 \ldots a_mb_1 \ldots b_m - a_1a_2 \ldots a_m,$$

portanto

$$x = \frac{a_1a_2 \ldots a_mb_1 \ldots b_m - a_1a_2 \ldots a_m}{10^{m+n} - 10^m},$$

como o numerador e o denominador da expressão acima são inteiros, concluimos que x é um racional. □

Exemplo 3.11. *Seja $x = 1,213434\ldots$, mostraremos que*

$$x = \frac{12013}{9900}.$$

Note que $10^4x = 12134,3434\ldots$ e $10^2x = 121,3434\ldots$, portanto

$$\begin{aligned} 10^4x - 10^2x &= 12134,3434\ldots - 121,3434\ldots \\ &= 12134 - 121 = 12013 \end{aligned}$$

e concluimos que

$$x = \frac{12013}{10^4 - 10^2} = \frac{12013}{9900}.$$

□

Exercício 3.8. *Escreva os seguintes números na forma $\frac{a}{b}$:*

$$0,444\ldots; \quad 2,666\ldots; \quad 0,34\overline{43}; \quad 0,9\overline{987}; \quad 0,00\overline{01}.$$

A seguir mostraremos que

$$0,999\ldots = 1, \tag{3.20}$$

o que aparentemente é estranho.

De fato, se fizermos $x = 0,999\ldots$, então

$$10x = 9,999\ldots = 9 + 0,999\ldots = 9 + x,$$

portanto $9x = 9$, logo $x = 1$. □

Se dividirmos (3.20) por 10, 100, 1000, 10000, etc, obteremos

$$0,1 = 0,09999\ldots$$

$$0,01 = 0,009999\ldots$$

$$0,001 = 0,0009999\ldots$$

$$0,0001 = 0,00009999\ldots,$$

etc.

Tendo em vista as relações acima, podemos representar uma decimal finita (exceto o zero) por uma dízima periódica. Por exemplo,

$$0,102 = 0,101 + 0,001 = 0,101 + 0,0009999\ldots = 0,1019999\ldots$$

$$6,82 = 6,81 + 0,01 = 6,82 + 0,009999\ldots = 6,819999\ldots$$

Exercício 3.9. *Encontre uma representação decimal infinita para os números abaixo.*

$$0,73; \quad 0,00099; \quad 13.$$

Da mesma forma, podemos transformar qualquer dízima periódica onde a parte que repete é o 9, em fração decimal finita; por exemplo,

$$0,46999\ldots = 0,46 + 0,00999\ldots = 0,46 + 0,01 = 0,47.$$

Exercício 3.10. *Encontre uma representação decimal finita para os números abaixo.*

$$0,111999\ldots; \quad 2,7999\ldots\ldots; \quad 99,9999\ldots.$$

3.7 Um exemplo de um número que não é racional

Dizemos que um número inteiro n é par se $n = 2k$, onde k é um número inteiro. De maneira análoga, dizemos que um número inteiro n é ímpar se $n = 2k - 1$, onde k é um número inteiro.

Exercício 3.11. *Mostre que o quadrado de um número inteiro n é par se, e somente se, n for par.*

Exemplo 3.12. *Considere um triângulo retângulo de catetos com comprimento* 1*. Mostraremos que o comprimento da sua hipotenusa h não é um número racional.*

Suponha, por contradição, que h fosse um número racional, portanto da forma $\frac{p}{q}$, onde podemos assumir que p e q são primos entre si. Pelo Teorema de Pitágoras, temos que

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 1^2 + 1^2 = 2.$$

Logo, $p^2 = 2q^2$, ou seja, p^2 é par, portanto p é par, ou seja, $p = 2r$. Logo $4r^2 = 2q^2$, portanto $q^2 = 2r^2$, donde concluimos que q é par. Mas, se p e q são pares, eles não podem ser primos entre si, com isso temos uma contradição, a qual foi consequência de termos assumido que a hipotenusa fosse racional. $\square$

No exemplo acima, mostramos que não existe número racional cujo quadrado seja 2, ou seja, a equação

$$x^2 = 2,$$

não solução em $\mathbb{Q}$. Em contrapartida, no conjunto dos números reais, o qual será será definido na Aula 5, a equação $x^2 = 2$ tem exatamente uma solução positiva, a qual será chamada de $\sqrt{2}$. Portanto, $\sqrt{2}$ é um exemplo de um número que não é número racional.

Exercício 3.12. *Mostre que* $5 + \sqrt{2}$ *não é um número racional.*

Exercício 3.13. *Seja* x *um número inteiro. Mostre que* x^2 *é múltiplo de* 3 *se, e somente se,* x *for múltiplo de* 3*.*
Sugestão: *Lembre que se* x *for inteiro, então temos uma das seguinte possibilidades:* (i) $x = 3k$, (ii) $x = 3k + 1$ *ou* (iii) $x = 3k + 2$, *onde* k *é um número inteiro (pois o resto da divisão de um número inteiro por* 3 *só pode ser* 0, 1 *ou* 2*.*

Exercício 3.14. *Mostre que não existe número racional cujo quadrado seja* 3*.*

4 Ínfimo e supremo de um corpo ordenado

AULA4: ÍNFIMO E SUPREMO DE UM CORPO ORDENADO

OBJETIVOS
Ao final dessa aula, o aluno deverá ser capaz de:
1. Compreender os conceitos de corpo e de corpo ordenado, e que o conjunto $\mathbb{Q}$ é um corpo ordenado.
2. Compreender as desigualdades que são válidas para um corpo ordenado qualquer.
3. Compreender os conceitos de cotas inferior e superior, de ínfimo e de supremo de um subconjunto de um corpo ordenado e calcular o ínfimo e o supremo de um conjunto.
4. Compreender que existem subconjuntos de $\mathbb{Q}$ que são limitados inferiormente, mas que não possuem ínfimo em $\mathbb{Q}$.

4.1 Definição de corpo ordenado

Definição 4.1. *Um corpo F é um conjunto no qual se acham definidas as operações de adição e de multiplicação, satisfazendo às seguintes propriedades:*

(1) *Leis comutativas:*

$$x + y = y + x \quad e \quad xy = yx.$$

(2) *Leis associativas:*

$$(x + y) + z = x + (y + z) \quad e \quad (xy)z = x(yz).$$

(3) *Existência de um (único) elemento* $0 \in F$*, tal que*

$$x + 0 = 0 + x = x,$$

para todo $x \in F$.

(4) *Existência de um (único) elemento* $1 \in F$*, tal que*

$$x\,1 = x,$$

para todo $x \in F$.

(5) *Existência de inversos: dado* $x \in F$*, existe* $-x \in F$*, tal que*

$$x + (-x) = 0$$

e dado $x \in F$ *com* $x \neq 0$*, existe* $x^{-1} \in F$*, tal que*

$$xx^{-1} = 1.$$

(6) *Lei distributiva:*

$$(x + y)z = xz + yz.$$

Exercício 4.1. *Os conjuntos* $\mathbb{N}$ *e* $\mathbb{Z}$ *são corpos? Por quê?*

Definição 4.2. *Um corpo* F *é ordenado se contiver um subconjunto* P *com as seguintes propriedades:*

(P_1) $x, y \in P$*, implica* $x + y \in P$ *e* $xy \in P$*, ou seja,* P *é fechado em relação às operações de adição e multiplicação.*

(P_2) *Dado* $x \in F$*, então temos uma, e somente uma, das três possibilidades:* $x \in P$*,* $-x \in P$ *ou* $x = 0$*.*

4.2 O conjunto $\mathbb{Q}$ é um corpo ordenado

Em virtude dos Teoremas 3.1, 3.2 e 3.3, concluimos que o conjunto $\mathbb{Q}$ é um corpo.
Definição 4.3. *Dizemos que um racional* x *é positivo, se* $x > 0$*. Denotamos por* $\mathbb{Q}^+$ *o subconjunto de* $\mathbb{Q}$ *formado pelos racionais positivos.*

Exercício 4.2. *Seja* (a, b) *um representante do racional* x*. Mostre que* $x > 0$ *se, e somente se,* $ab > 0$*.*

Teorema 4.1. *Dados* $x, y \in \mathbb{Q}^+$*, então* $x + y, xy \in \mathbb{Q}^+$*. Além disso, dado* $x \in \mathbb{Q}$*, temos uma, e somente uma, das três possibilidades:*

$$x \in \mathbb{Q}^+, \quad -x \in \mathbb{Q}^+ \quad ou \quad x = 0.$$

Prova. Dados $x, y \in \mathbb{Q}^+$, sejam (a, b) e (c, d) representantes de x e y, respectivamente. Como $x, y > 0$, pelo Exercício 4.2,

$$ab, cd > 0.$$

Além disso, $(ad+bc, bd)$ é representante de $x+y$, mostraremos que $(ad+bc)(bd) > 0$ e em virtude do Exercício 4.2, concluiremos que $x+y$ é positivo. De fato,

$$(ad+bc)(bd) = (ab)d^2 + (cd)b^2 > 0.$$

Por outro lado, (ac, bd) é um representante de xy e

$$(ac)(bd) = (ab)(cd) > 0$$

e, pelo Exercicio 4.2, concluimos que $xy > 0$.

Temos uma das seguintes possibilidades: $x = 0$ ou $x \neq 0$. Se $x \neq 0$, seja (a, b) um representante de x, então $a \neq 0$, portanto $ab \neq 0$ (lembre que $b \neq 0$). Logo temos uma das seguintes possibilidades: (i) $ab > 0$, e pelo Exercício 4.2, concluimos que $x > 0$ ou (ii) $ab < 0$, portanto $(-a)b > 0$, como $(-a, b)$ é um representante de $-x$, do Exercício 4.2, concluimos que $-x > 0$. $\square$

Em virtude do Teorema 4.1, concluimos que $\mathbb{Q}$ é um corpo ordenado onde $P = \mathbb{Q}^+$.

4.3 Algumas desigualdades válidas para corpo ordenado qualquer

A seguir, através de exemplos, mostraremos algumas desigualdades que valem para um corpo ordenado qualquer e, em particular, elas valem para $\mathbb{Q}$.

Dados x e y num corpo ordenado F, dizemos que $x > y$ se, e somente se, $x - y \in P$. De maneira análoga, dizemos que $x < y$ se, e somente se, $-(x-y) = y - x \in P$.

Exemplo 4.1. *Seja $x \neq 0$ um elemento de um corpo ordenado F, então*

$$x^2 \in P.$$

De fato, como $x \neq 0$ e F é um corpo ordenado, temos uma das seguintes possibilidades: $x \in P$ ou $-x \in P$; no primeiro caso, temos $x^2 \in P$ e, no segundo caso, $(-x)^2 \in P$. Como $(-x)^2 = x^2$ concluimos que $x^2 \in P$. $\square$

Exemplo 4.2. *Se $x > 0$ e $0 > y$, então*

$$0 > xy.$$

De fato, como $x > 0$ e $0 > y$, então $x \in P$ e $-y \in P$, portanto $x(-y) \in P$. Como $-(xy) = x(-y)$, concluimos que $-(xy) \in P$. Como $0 - (xy) = -(xy)$, temos que $0 - xy \in P$, então $0 > xy$. $\square$

Exemplo 4.3. *Se* $x > y$ *e* $y > z$*, então*

$$x > z.$$

De fato, como $x > y$, então $x - y \in P$, da mesma forma, como $y > z$, então $y - z \in P$, logo a soma $(x - y) + (y - z) \in P$. Mas $(x - y) + (y - z) = x - z$, portanto, se $x - z \in P$, concluimos que $x > z$. $\square$

Exemplo 4.4. *Se* $x > y$ *e* $z > t$*, então*

$$x + z > y + t.$$

De fato, como $x > y$ e $z > t$, então $x - y \in P$ e $z - t \in P$, portanto

$$(x - y) + (z - t) \in P,$$

mas $(x - y) + (z - t) = (x + z) - (y + t)$, logo

$$(x + z) - (y + t) \in P,$$

ou seja, $x + z > y + t$. $\square$

Exemplo 4.5. *Se* $x > y$ *e* z *qualquer, então*

$$x + z > y + z.$$

De fato, se $x > y$, então $x - y \in P$, portanto

$$(x + z) - (y + z) = x - y \in P,$$

logo $x + z > y + z$. $\square$

Exemplo 4.6. $a < b$*, então*

$$-a > -b.$$

De fato, note que se $a < b$, então $-(a - b) \in P$, ou seja, $-a - (-b) \in P$, portanto, $-a > -b$. $\square$

Exemplo 4.7. *Se* $x > y$ *e* $z > 0$*, então*

$$xz > yz.$$

De fato, como $x > y$ e $z > 0$, então, $x - y$ e z pertencem a P e, por conseguinte, $(x - y)z \in P$. Mas pela lei distributiva $xz - yz = (x - y)z$, com isso concluimos que $xz - yz \in P$, logo $xz > yz$. $\square$

Exemplo 4.8. *Se* $b > a > 0$*, então*

$$a^{-1} > b^{-1} > 0.$$

De fato, como $a \neq 0$, então existe a^{-1} e pelo Exemplo 4.1 temos que $(a^{-1})^2 \in P$. Como a e $(a^{-1})^2$ estão em P, então

$$a^{-1} = a\,(a^{-1})^2 \in P.$$

De maneira análoga, mostra-se que $b^{-1} \in P$, ou seja,

$$b^{-1} > 0.$$

Como a^{-1} e b^{-1} estão em P, então $a^{-1}b^{-1} \in P$, ou seja,

$$a^{-1}b^{-1} > 0.$$

Como por hipótese $b > a$ e mostramos que $a^{-1}b^{-1} > 0$, do Exemplo 4.7, temos

$$b(a^{-1}b^{-1}) > a(a^{-1}b^{-1}),$$

portanto, pela associatividade e pela comutatividade da multiplicação, temos

$$(bb^{-1})a^{-1} > (aa^{-1})b^{-1}.$$

ou seja,

$$a^{-1} > b^{-1}.$$

□

Exemplo 4.9. *Se* $0 < x < y$ *e* $0 < x' < y'$*, então*

$$xx' < yy'.$$

De fato, note que y, $y' - x'$, $y - x$ e x' pertecem a P, logo

$$\begin{aligned} yy' - xx' &= (yy' - yx') + (yx' - xx') \\ &= y(y' - x') + (y - x)x' \in P, \end{aligned}$$

portanto $yy' - xx' > 0$, ou seja, $xx' < yy'$. □

Exemplo 4.10. *Sejam* $x, y > 0$*, tais que* $x^2 < 2$ *e* $y^2 > 2$*. Então* $x < y$*.*

De fato, como $y^2 > 2$, então

$$-y^2 < -2,$$

como

$$x^2 < 2,$$

seguem destas duas desigualdades que

$$x^2 - y^2 < 0.$$

Ou seja, $(x - y)(x + y) < 0$, como $x + y > 0$, temos $x - y < 0$, portanto $x < y$. □

4.4 Cotas inferior e superior

Definição 4.4. (*Cota superior*) *Seja F um corpo ordenado e A um subconjunto de F. Dizemos que um elemento $x \in F$ é uma cota superior de A, se $x \geq y$ para todo $y \in A$. Neste caso dizemos que A é limitado superiormente.*

Exercício 4.3. *Considere o corpo ordenado $\mathbb{Q}$.*

(a) *Seja $A = \{5, 6, \ldots, 10\}$. Encontre uma cota superior para A.*
(b) *Dê um exemplo de um subconjunto de $\mathbb{Q}$ que não possui cota superior.*

Definição 4.5. (*Cota inferior*) *Seja F um corpo ordenado e A um subconjunto de F. Dizemos que um elemento $x \in F$ é uma cota inferior de A, se $x \leq y$ para todo $y \in A$. Neste caso dizemos que A é limitado inferiormente.*

Exercício 4.4. *Dê um exemplo de um subconjunto de $\mathbb{Q}$ que não possui cota inferior.*

Definição 4.6. *Dizemos que um subconjunto de um corpo ordenado é limitado se ele for limitado superiormente e inferiormente.*

4.5 Supremo e ínfimo de um conjunto

Definição 4.7. (*Supremo de um conjunto*) *Seja F um corpo ordenado e A um subconjunto de F limitado superiormente. O supremo de A, denotado por $\sup A$, é a menor das cotas superiores de A. Em outras palavras, $x \in F$ é o supremo de A, se*

(i) *x for uma cota superior de A*

(ii) *se z for uma cota superior de A, então, $x \leq z$.*

Exemplo 4.11. *O supremo de um conjunto A não necessariamente pertence a A. Por exemplo, seja*

$$A = \{y \in \mathbb{Q} \, : \, 0 < y < 1\}.$$

Mostraremos que $\sup A = 1$, mas $1 \notin A$.

Note que qualquer número racional $r \geq 1$ é uma cota superior de A, pois se $r \geq 1$, então $r \geq y$, para todo $y \in A$. O que provaremos é que 1 é a menor cota superior de A e concluiremos que $\sup A = 1$.

Para mostrarmos que 1 *é a menor cota superior de* A *temos que provar que nenhum racional* $r < 1$ *pode ser uma cota superior de* A*, ou seja, se* $r < 1$ *podemos encontrar um elemento* $r' \in A$*, tal que* $r' > r$*. De fato, se* $r < 1$*, temos duas possibilidades:* (i) $r \leq 0$ *ou* (ii) $0 < r < 1$*. Claramente* $r \leq 0$ *não pode ser uma cota superior de* A*, pois* $1/2 \in A$ *e* $1/2 > r$*. Mostraremos que se* $0 < r < 1$*, então* r *não pode ser uma cota superior de* A*. De fato, pelo Exercício 3.4, vimos que a média de dois números racionais é um número racional, em particular*

$$r' = \frac{r+1}{2}$$

é número racional. Além disso, como $0 < r < 1$*, então*

$$0 < r < r' < 1.$$

Como $r' \in \mathbb{Q}$ *e* $0 < r' < 1$*, então* $r' \in A$*. Como* $r' \in A$ *e* $r' > r$*, segue que* r *não pode ser uma cota superior de* A*. Portanto* 1 *é a menor cota superior de* A *e concluimos que* $\sup A = 1$*.*

Exemplo 4.12. *Seja* $B \subset \mathbb{Q}$*, definido por*

$$B = \{y \in \mathbb{Q} \, : \, 0 \leq y \leq 1\},$$

então $\sup B = 1$ *e* $1 \in B$*.*

De fato, 1 *é uma cota superior de* A *e usando os argumentos do Exemplo 4.11 concluimos que nenhum racional* $r < 1$ *pode ser uma cota superior de* A*.*

Definição 4.8. $($*Ínfimo de um conjunto*$)$ *Seja* F *um corpo ordenado e* A *um subconjunto de* F *limitado inferiormente. O ínfimo de* A*, denotado por* $\inf A$*, é a maior das cotas inferiores de* A*. Em outras palavras,* $x \in F$ *é o ínfimo de* A*, se*

(i) *x for uma cota inferior de* A

(ii) *se* z *for uma cota inferior de* A*, então,* $x \geq z$*.*

Exemplo 4.13. *Sejam* A *e* B *os conjuntos definidos nos dois exemplos anteriores, então* $\inf A = 0$ *e* $\inf B = 0$*.*

Mostraremos que $\inf A = 0$*.*

Note que qualquer racional $r \leq 0$ *é uma cota inferior de* A*, pois se* $y \in A$*, então* $y \geq 0$*. Mostraremos que se* $r > 0$ *for um racional, podemos encontrar algum* $r' \in A$*, tal que* $r' < r$*, portanto* r *não pode ser uma cota inferior de* A*. Com isso concluiremos que* 0 *é a maior cota inferior de* A*, ou seja,* $\inf A = 0$*. De fato, se* $r > 0$*, temos duas possibilidades:* (i) $r \geq 1$ *ou* (ii) $0 < r < 1$*. Se* $r \geq 1$*, então* r *não pode ser uma cota inferior de* A*, pois* $1/2 \in A$ *e* $1/2 < r$*. Mostraremos que, se* $0 < r < 1$*, então* r *não pode ser uma cota inferior de* A*. Para mostrar isso, note que*

$$r' = \frac{0+r}{2} = \frac{r}{2}$$

é número racional $($*a média de números racionais é um número racional*$)$ *e como* $0 < r < 1$*, então* $0 < r' < r < 1$*. Como* $r' \in \mathbb{Q}$ *e* $0 < r' < 1$*, então* $r' \in A$*. Além disso, como* $r' \in A$ *e* $r' < r$*, concluimos que* r *não pode ser uma cota inferior de* A*. Portanto* 0 *é a maior cota inferior de* A*.*

De maneira análoga, mostra-se que $\inf B = 0$*.*

Exercício 4.5. *Seja*

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \, : \, x = (-1)^n n^{-1}, \, n \in \mathbb{N}\}.$$

Mostre que $\sup A = \frac{1}{2}$ *e* $\inf A = -1$*.*

Como o único corpo ordenado que vimos até agora é o conjunto $\mathbb{Q}$, nos exemplos de ínfimo e de supremo nos restringimos a subconjuntos dele.

Na Aula 5 veremos que o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado e consideraremos exemplos de ínfimo e de supremo de subconjuntos de $\mathbb{R}$.

No próximo teorema mostraremos que nem todo subconjunto de $\mathbb{Q}$ limitado inferiormente possui ínfimo em $\mathbb{Q}$.

Teorema 4.2. *Seja*

$$A = \{x \in \mathbb{Q}^+ \, : \, x^2 > 2\}.$$

Afirmamos que A *não possui ínfimo em* $\mathbb{Q}$*.*

Prova. Seja

$$B = \{x \in \mathbb{Q}^+ \, : \, x^2 < 2\}.$$

Dado um número racional positivo x, temos uma das seguintes possibilidades: $x^2 > 2$, o que implica $x \in A$, ou $x^2 < 2$, o que implica $x \in B$. A possibilidade $x^2 = 2$ não acontece, pois vimos que não existe número racional cujo o quadrado seja 2. Portanto, dado um racional $x > 0$, temos uma das seguintes possibilidades:

$$x \in A \quad ou \quad x \in B.$$

Supondo que $\inf A \in \mathbb{Q}$, mostraremos que isto nos levará a uma contradição. De fato, note que 1 é uma cota inferior para A, portanto, devemos ter $\inf A \geq 1$, consequentemente $\inf A$ será um número racional positivo, portanto ele deverá estar em A ou em B. Contudo, mostraremos o seguinte:

(i) Se $x \in A$, podemos encontrar $y \in A$ com $y < x$, logo, nenhum elemento de A pode ser uma cota inferior para A, portanto não pode ser o ínfimo de A.

(ii) Se $x \in B$, mostraremos que existe $y \in B$, tal que $y > x$. Como todo $x \in B$ é uma cota inferior de A (por quê?), concluimos que nenhum elemento de B pode ser a maior que uma cota inferior de A, portanto não pode ser o inf A.

Para mostrarmos (i), seja $x = p/q \in A$, com $p, q > 0$. Note que para todo inteiro positivo n,

$$y = p/q - 1/nq < p/q.$$

Mostraremos que é possível tomarmos n suficientemente grande, tal que $y \in A$, ou seja, $y^2 > 2$, isto é,

$$(np-1)^2/n^2q^2 > 2,$$

o que é equivalente a

$$(p^2 - 2q^2)n^2 - 2pn + 1 > 0. \tag{4.1}$$

Como $x \in A$, então $p^2 - 2q^2 > 0$, logo existe um $n_o \in \mathbb{N}$, tal que (4.1) seja válida para $n \geq n_o$; por quê? Isto mostra (i).

Para mostrarmos (ii), seja $x = p/q \in B$, com $p, q > 0$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $y = p/q + 1/nq > p/q$. Mostraremos que é possível tomarmos n suficientemente grande, tal que $y \in B$, ou seja, $y^2 < 2$, isto é, $(np+1)^2/n^2q^2 < 2$, o que é equivalente a

$$-(2q^2 - p^2)n^2 + 2pn + 1 < 0. \tag{4.2}$$

Como $x \in B$, então $2q^2 - p^2 > 0$, logo existe um $n_o \in \mathbb{N}$, tal que (4.2) seja válida para $n \geq n_o$; por quê? Isto prova (ii). $\square$

Exercício 4.6. *Encontre o ínfimo e o supremo dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{Q}$:*

(1) $\{n/(n+1) \; : \; n \in \mathbb{N}\}$.

(2) $\{\frac{n+(-1)^n n}{n+1} \; : \; n \in \mathbb{N}\}$.

5

O conjunto dos números reais

AULA5: O CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS

OBJETIVOS
Ao final dessa aula, o aluno deverá ser capaz de:
1. Compreender a definição dos reais a partir do Postulado de Dedekind, bem como as consequências da mesma.
2. Provar afirmações que envolvam os conceitos de ínfimo e de supremo de subconjuntos dos números reais.
3. Compreender porque os racionais são densos em $\mathbb{R}$.
4. Compreender o conceito de $\sqrt[n]{x}$, onde x é um real não negativo.

5.1 Definição do conjunto dos números reais

Definimos o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais como sendo o corpo ordenado onde vale a propriedade abaixo.
Postulado 1. (*Postulado de Dedekind*) *Todo subconjunto não vazio de* $\mathbb{R}$*, constituído de elementos positivos, tem um ínfimo.*

Qualquer corpo ordenado F possui um subconjunto, que podemos identificar com o conjunto $\mathbb{Q}$. De fato, sendo F um corpo ordenado, ele contém o número 1 e, sendo ele fechado em relação a soma, contém todos os naturais: $2 = 1 + 1$, $3 = 2 + 1, \ldots$ Sendo F um corpo ordenado, ele contém 0 e o simétrico de cada natural; portanto, ele contém um subconjunto que podemos identificar com os inteiros. Sendo F um corpo ordenado, ele contém os inversos dos inteiros não nulos e produtos destes com inteiros, ou seja, ele contém um subconjunto que podemos identificar com os racionais. Em particular, sendo $\mathbb{R}$ um corpo ordenado, ele contém um subconjunto que podemos identificar como os racionais. Veremos que é a propriedade do postulado acima que distingue $\mathbb{R}$ de $\mathbb{Q}$.

Teorema 5.1. *Seja A um subconjunto não vazio de* $\mathbb{R}$ *limitado inferiormente, então* $\inf A$ *existe.*

Prova. Se A for formado apenas por números positivos, a conclusão segue diretamente do Postulado de Dedekind e não temos nada a fazer. Suponha que A possua elementos não positivos. Como A é limitado inferiormente, por definição, existe um número real $l < 0$, tal que $a > l$, para todo $a \in A$. Seja

$$B = A - l \equiv \{a - l \,:\, a \in A\},$$

então os elementos de B são positivos. Logo, B é um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$, cujos elementos são positivos, pelo Postulado de Dedekind, ele possui um ínfimo. Seja

$$L = \inf B,$$

afirmamos que

$$\inf A = L + l.$$

Para todo $a \in A$, $a - l \in B$, portanto $a - l \geq L$, pois L é uma cota inferior para B, ou seja, para todo $a \in A$, $a \geq L + l$ e concluímos que $L + l$ é uma cota inferior para A. Resta-nos mostrar que $L + l$ é a maior das cotas inferiores de A. É isto que mostraremos a seguir. Suponha que L' seja uma cota inferior para A, então para todo $a \in A$, temos $L' \leq a$, ou seja, $L' - l \leq a - l$ e, como todo elemento de B é da forma $a - l$, para algum $a \in A$, concluímos que $L' - l$ é uma cota inferior para B. Como L é a maior das cotas inferiores de B, segue que $L' - l \leq L$, portanto $L' \leq L + l$, logo toda cota inferior de A é menor ou igual a $L + l$ e concluimos que $L + l$ é a maior das cotas inferiores de A. $\square$

Teorema 5.2. *Seja A um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ limitado superiormente. Então,*

$$\sup A = -\inf(-A),$$

onde $-A = \{-x : x \in A\}$.

Prova. Como A é limitado superiormente, existe $k \in \mathbb{R}$, tal que $a \leq k$, para todo $a \in A$. Ou seja, $-a \geq -k$, para todo $a \in A$, portanto $-A$ é limitado inferiormente por $-k$ e pelo Teorema 5.1, existe $l \in \mathbb{R}$, tal que

$$l = \inf(-A).$$

Como $l = \inf(-A)$, então l é uma cota inferior para $-A$, logo $-a \geq l$, para todo $a \in A$, ou seja, $a \leq -l$ para todo $a \in A$ e concluímos que $-l$ é uma cota superior para A.

Agora suponha que l' seja uma cota superior para A, então para todo $a \in A$, temos $a \leq l'$, portanto $-a \geq -l'$ e concluímos que $-l'$ é uma cota inferior para $-A$. Como l é a maior das cotas inferiores de $-A$, segue que $-l' \leq l$, ou seja, $l' \geq -l$. Logo $-l$ é a menor das cotas superiores de $-A$. Portanto, $\sup A = -l = -\inf(-A)$. $\square$

5.2 O conjunto $\mathbb{R}$ é arquimediano

Teorema 5.3. *O corpo dos números reais é arquimediano, ou seja, se $x, y \in \mathbb{R}$ e $x > 0$, então existe um inteiro positivo n, tal que*

$$nx > y.$$

Prova. Seja

$$A = \{nx : n \in \mathbb{N}\}.$$

Se não existisse $n \in \mathbb{N}$, tal que $nx > y$, teríamos $nx \leq y$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e y seria uma cota superior para A. Sendo A um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ que é limitado superiormente, então pelo Teorema 5.2, ele possui supremo. Seja $l = \sup A$. Como $x > 0$, $l - x < l$ e $l - x$ não é uma cota superior para A, portanto $l - x < mx$ para algum $m \in \mathbb{N}$, ou seja, teríamos $l < (m+1)x$, para algum $\in \mathbb{N}$. Como $(m+1)x \in A$, isto seria impossível, visto que l, sendo uma cota superior de A, deve ser tal que $l \geq a$, para todo $a \in A$. □

5.3 Os números racionais são densos em $\mathbb{R}$

Teorema 5.4. *O conjunto $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$, ou seja, dados $x, y \in \mathbb{R}$ com $x < y$, existe $r \in \mathbb{Q}$, tal que $x < r < y$.*

Prova. Como $x < y$, temos $y - x > 0$ e o Teorema 5.3 nos fornece um inteiro positivo n, tal que

$$n(y - x) > 1 \Rightarrow xn < yn - 1. \tag{5.1}$$

Aplicando o Teorema 5.3 novamente, agora com $x = 1$, encontramos um inteiro positivo m, tal que $m > yn + 2$.

Seja $A = \{k \in \mathbb{N} : k > m - yn\}$, pelo *Princípio da Boa Ordenação*, existe um natural q (> 2), tal que q é o menor elemento de A. Como $q \in A$, temos

$$q > m - yn \Rightarrow m - q < yn, \tag{5.2}$$

como q é o menor elemento de A, temos

$$(q - 1) \leq m - yn \Rightarrow m - q \geq yn - 1. \tag{5.3}$$

De (5.2), (5.3) e (5.1), temos

$$yn > m - q \geq yn - 1 > xn.$$

Portanto,

$$xn < m - q < yn.$$

Dividindo as desigualdades acima por n, temos

$$x < (m - q)/n < y,$$

fazendo $r = (m - q)/n$, concluímos a demonstração do teorema. □

Exercício 5.1. *Sejam a, b números reais positivos. Mostre que se $a < b$, então*

$$a^2 < b^2.$$

Sugestão: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

5.4 Os números irracionais

Na Aula 3, vimos que não existe número racional x, tal que $x^2 = 2$. No Exemplo 5.1, veja a seguir, mostraremos que existe um (único) número real positivo x tal que $x^2 = 2$; ele é chamado de $\sqrt{2}$. Números reais que não são racionais são chamados de *irracionais*, portanto $\sqrt{2}$ é um exemplo de um número irracional.

Exemplo 5.1. *Seja*

$$A = \{t \in \mathbb{Q}^+ \,:\, t^2 > 2\}.$$

Visto como um subconjunto de $\mathbb{R}$, *o conjunto* A *possui ínfimo em* $\mathbb{R}$, *pois ele é limitado inferiormente (dê um exemplo de uma cota inferior para* A*). Mostraremos que* $\inf A$ *não é racional.*

De fato, seja

$$y = \inf A.$$

Mostraremos que $y^2 = 2$ e pelo Exemplo 3.12, y não pode ser racional.
A seguir, mostraremos que qualquer uma das desigualdades $y^2 > 2$ ou $y^2 < 2$ nos levaria a uma contradição, portanto devemos ter $y^2 = 2$.

Suponha que $y^2 < 2$, então

$$\left(y + \frac{1}{n}\right)^2 = y^2 + \frac{2y}{n} + \frac{1}{n^2} \leq y^2 + \frac{2y+1}{n} < 2,$$

se $n > \dfrac{2y+1}{2-y^2}$. Como $\left(y + \dfrac{1}{n}\right)^2 < 2$, então $y + \dfrac{1}{n}$ é uma cota inferior para A, contrariando o fato que y é a maior das cotas inferiores de A.

Suponha que $y^2 > 2$, então

$$\left(y - \frac{1}{n}\right)^2 = y^2 - \frac{2y}{n} + \frac{1}{n^2} \geq y^2 - \frac{2y}{n} > 2, \tag{5.4}$$

se $n > \dfrac{2y}{y^2-2}$. Como $y - \dfrac{1}{n} < y$ do Teorema 5.4, existe um racional r, tal que

$$y - \frac{1}{n} < r < y$$

e em virtude do Exercício 5.1, temos

$$\left(y - \frac{1}{n}\right)^2 < r^2 < y^2. \tag{5.5}$$

De (5.4) e (5.5), temos

$$2 < \left(y - \frac{1}{n}\right)^2 < r^2 < y^2, \tag{5.6}$$

o que é uma contradição, pois sendo r um racional positivo, tal que $r^2 > 2$, então $r \in A$ e deveríamos ter $r \geq y$, ou seja, $r^2 \geq y^2$, o que contraria a última desigualdade em (5.6). $\square$

Afirmamos que a equação $x^2 = a$, onde $a > 0$, tem no máximo uma solução positiva. De fato, se x_1 e x_2 são soluções positivas de $x^2 = a^2$, então temos $x_1^2 = a^2 = x_2^2$, logo $x_1^2 - x_2^2 = 0$, ou seja,

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0,$$

como x_1 e x_2 são positivos, então $x_1 + x_2 > 0$, portanto

$$x_1 - x_2 = 0,$$

ou seja, $x_1 = x_2$.

Usando os argumentos da demonstração do Exemplo 5.1, mostra-se que existe um número real positivo x, tal que $x^2 = a$. Portanto, a equação $x^2 = a$, onde $a > 0$ tem exatamente uma solução positiva, a qual é chamada de $\sqrt{a}$.

Exemplo 5.2. *$-\sqrt{2}$ e $1 + \sqrt{2}$ são irracionais.*

De fato, como $\mathbb{Q}$ é um corpo, ele é fechado em relação às operações de soma e multiplicação, ou seja, soma e produto de racionais é racional. Se $-\sqrt{2}$ fosse racional, ao multiplicá-lo pelo racional -1, o produto teria que ser racional; contudo,

$$-1 \, . \, (-\sqrt{2}) = \sqrt{2}$$

que sabemos ser irracional. De maneira análoga, se $1 + \sqrt{2}$ fosse racional, ao somarmos o racional -1 a este número, a soma seria uma racional, mas

$$(1 + \sqrt{2}) + (-1) = \sqrt{2},$$

que é irracional. Em geral, se x for racional e y irracional, então $x + y$ e xy (se $x \neq 0$) são irracionais. $\square$

Teorema 5.5. *Os números irracionais são densos em $\mathbb{R}$, ou seja, dados arbitrariamente $x, y \in \mathbb{R}$, com $x < y$, existe número irracional z, tal que $x < z < y$.*

Prova. Como os racionais são densos em $\mathbb{R}$, existe $r \in \mathbb{Q}$, tal que

$$x + \sqrt{2} < r < y + \sqrt{2},$$

subtraindo $\sqrt{2}$ das desigualdades acima, concluimos que

$$x < r - \sqrt{2} < y.$$

Fazendo $z = r - \sqrt{2}$, concluimos que $x < z < y$. Afirmamos z é irracional. Caso contrário, se z fosse racional, então $z - r$, por ser a diferença de dois racionais, também seria racional, mas $z - r = -\sqrt{2}$ é irracional; veja Exemplo 5.2. □

5.5 A função $\sqrt[n]{x}$

Dado um número real positivo a, se chamarmos de A o subconjunto dos números reais positivos t, tais que $t^n < a$, então usando os argumentos da demonstração do Exemplo 5.1, mostra-se que $x = \inf A$ satisfaz a equação $x^n = a$. Por outro lado, se usarmos a identidade

$$b^n - a^n = (b-a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + \ldots + a^{n-1}),$$

mostramos que a equação $x^n = a$, onde $a > 0$ tem no máximo uma solução positiva. Portanto, a equação $x^n = a$, onde $a > 0$ tem exatamente uma raiz positiva, a qual chamamos de $\sqrt[n]{a}$ ou $a^{1/n}$.

5.6 Exercícios resolvidos sobre ínfimo e supremo

Exercício 5.2. *Mostre que o conjunto $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente. Em particular, dado $x \in \mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $n > x$.*

Resolução. Suponha que $\mathbb{N}$ fosse limitado superiormente, então, existiria um $x_o \in \mathbb{R}$, tal que $n \leq x_o$, para todo $n \in \mathbb{N}$; e do Teorema 5.2 existiria $L \in \mathbb{R}$, tal que $L = \sup \mathbb{N}$; em particular, $L - 1$ não seria uma cota superior para $\mathbb{N}$, ou seja, existiria $n \in \mathbb{N}$, tal que $n > L - 1$, ou seja, $L < n + 1$, o que seria um contradição, pois $L = \sup \mathbb{N}$, implicaria $L \geq m$, para todo $m \in \mathbb{N}$, em particular para $m = n + 1$. □

Exercício 5.3. *Dado $x > 0$, mostre que existe $n \in \mathbb{N}$, tal que*

$$x > 1/n > 0.$$

Resolução. Como $\mathbb{R}$ é um corpo, $x^{-1} = 1/x$ também pertence a $\mathbb{R}$, logo, do exercício anterior, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $n > 1/x > 0$. Multiplicando estas desigualdades por xn^{-1}, temos o resultado desejado. $\square$

Sejam a e b números reais com $a < b$. Um intervalo é um conjunto com uma das seguinte formas:

$$(a,b) \;=\; \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x < b\}, \quad [a,b] = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a \leq x \leq b\}$$

$$[a,b) \;=\; \{x \in \mathbb{R} \,:\, a \leq x < b\}, \quad (a,b] = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x \leq b\}$$

O intervalo (a,b) é chamado de aberto, não contém as suas extremidades. O intervalo $[a,b]$ é chamado de fechado, ele contém as suas extremidades. O interior de qualquer um dos quatro intervalos acima é por definição o intervalo aberto (a,b).

Uma semi-reta é um conjunto de uma das seguintes formas:

$$(a,\infty) \;=\; \{x \in \mathbb{R} \,:\, x > a\}, \quad (-\infty,b) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x < b\}$$

$$[a,\infty) \;=\; \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \geq a\}, \quad (-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \leq b\}.$$

Nos dois primeiros casos, a extremidade não pertence à semi-reta e dizemos que ela é aberta. Nos dois últimos casos, a extremidade pertence à semi-reta e dizemos que ela é fechada.

Exercício 5.4. *Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$, tal que $l = \inf A$ exista. Mostre que para todo $\epsilon > 0$ existe algum $a \in A$, no intervalo $[l, l+\epsilon)$.*

Resolução. Suponha que para algum $\epsilon_o > 0$ não existisse $a \in A$ no intervalo $[l, l+\epsilon_o)$. Mostraremos que isto nos levaria a uma contradição. De fato, como l é uma cota inferior para A, então $x \geq l$, para todo $x \in A$. Como estamos supondo que não existam elementos de A em $[l, l+\epsilon_o)$, então $x \geq l+\epsilon_o$, para todo $x \in A$, ou seja, $l+\epsilon_o$ seria uma cota inferior para A, o que seria uma contradição, pois l é a maior das cotas inferiores de A. $\square$

Exercício 5.5. *Sejam A e B dois conjuntos não vazios de números reais que são limitados inferiormente e seja*

$$A + B = \{a + b \, : \, a \in A, b \in B\}.$$

Mostre que

$$\inf(A + B) = \inf A + \inf B.$$

Resolução. Como A e B são subconjuntos de $\mathbb{R}$, limitados inferiormente, então pelo Teorema 5.1 existem l_A e l_B reais tais que $l_A = \inf A$ e $l_B = \inf B$. Portanto, para todos $a \in A$ e $b \in B$, temos

$$a \geq l_A \quad e \quad b \geq l_B,$$

logo

$$a + b \geq l_A + l_B,$$

o que mostra que $l_A + l_B$ é uma cota inferior para $A + B$. Mostraremos $l_A + l_B$ é a maior cota inferior de $A + B$, portanto $l_A + l_B = \inf(A + B)$. Suponha que l seja uma cota inferior para $A + B$. Se $l > l_A + l_B$, tomaríamos

$$\epsilon_o = (l - (l_A + l_B))/4.$$

Para esta escolha de ϵ_o, do Exercício 5.4, existiriam $a_o \in A$ e $b_o \in B$, tais que

$$a_o \in [l_A, l_A + \epsilon_o) \Rightarrow a_o < l_A + \epsilon_o,$$

e

$$b_o \in [l_B, l_B + \epsilon_o) \Rightarrow b_o < l_B + \epsilon_o,$$

em particular

$$a_o + b_o \leq l_A + l_B + 2\epsilon_o = \frac{l_A + l_B + l}{2} < l,$$

contrariando a hipótese de l ser uma cota inferior para o conjunto $A + B$. $\square$

Exercício 5.6. *Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$, tal que $l = \sup A$ exista. Mostre que para todo $\epsilon > 0$ existe algum $a \in A$, no intervalo $(l - \epsilon, l]$.*

Resolução. Suponha que para algum $\epsilon_o > 0$ não existisse $a \in A$, no intervalo $(l - \epsilon_o, l]$. Mostraremos que isto nos levaria a uma contradição. De fato, como l é uma cota superior para A, então $x \leq l$, para todo $x \in A$. Como estamos supondo que não existam elementos de A em $(l-\epsilon_o, l]$, então $x \leq l-\epsilon_o$, para todo $x \in A$, ou seja, $l-\epsilon_o$ seria uma cota superior para A, o que seria uma contradição, pois l é a menor das cotas superiores de A. $\square$

Exercício 5.7. *Seja $S \subset \mathbb{Z}$ limitado inferiormente. Mostre que existe $l = \inf S$ e $l \in S$, portanto l é um inteiro.*

Resolução. Se olharmos para S como um subconjunto de $\mathbb{R}$ ele é limitado inferiormente, portanto existe $l = \inf S$. Mostraremos que $l \in S$. Como o intervalo $[l, l+1/2)$ tem comprimento $1/2$, ele contém no máximo um número inteiro, portanto no máximo um elemento de S. Pelo Exercício 5.4, tem que existir algum elemento de S em $[l, l+1/2)$. Portanto, existe exatamente um elemento de S em $[l, l+1/2)$, o qual denotaremos por n_o. Se l fosse diferente de n_o, então

$$l < n_o < l + 1/2,$$

em particular, $l + \frac{n_o - l}{2} < n_o$, consequentemente

$$\left[l, l + \frac{n_o - l}{2}\right) \subset [l, n_o) \subset [l, l+1/2).$$

Da inclusão $[l, l + \frac{n_o-l}{2}) \subset [l, l+1/2)$, como n_o é o único elemento de S em $[l, l+1/2)$, concluímos que o único elemento de S que poderia existir em $[l, l+\frac{n_o-l}{2})$ seria n_o, mas isto não é possível, pois $l + \frac{n_o-l}{2} < n_o$. Portanto, não haveria elementos de S em $[l, l+\frac{n_o-l}{2})$, contrariando o resultado provado no Exercício 5.4, segundo o qual, sendo $l = \inf S$, então para todo $\epsilon_o > 0$, deve existir algum elemento de S em $[l, l+\epsilon_o)$. Portanto, devemos ter $n_o = l = \inf S$. $\square$

Exercício 5.8. *Mostre que dado um número real x, existe um inteiro n, tal que*

$$n \leq x < n+1.$$

Resolução. Seja $S = \{n \in \mathbb{Z} : x-1 < n\}$, então S é não vazio e limitado inferiormente, logo existe $n_o = \inf S$, o qual pelo Exercício 5.7 pertence a S. Como $n_o \in S$, então $x - 1 < n_o$. Não podemos ter $x-1 < n_o - 1$, pois $n_o - 1$ estaria em S, contrariando o fato que $n_o = \inf S$. Portanto $x - 1 \geq n_o - 1$, isto implica $x \geq n_o$. Colocando tudo junto, temos $n_o \leq x < n_o + 1$. $\square$

Exercício 5.9. *Suponha que* γ *seja uma cota superior para o conjunto* A *e que* $\gamma \in A$. *Mostre que* $\gamma = \sup A$.

Resolução. Seja L uma cota superior para A, temos que mostrar que $L \geq \gamma$. De fato, se $L < \gamma$, como $\gamma \in A$, teríamos um elemento do conjunto A maior do que L, o que contrariaria a hipótese de L ser uma cota superior para A. □

Exercício 5.10. *Seja*

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x = (n+1)/n,\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Encontre o ínfimo e o supremo do conjunto A.

Resolução. Note que

$$1 < \frac{n+1}{n} \leq 2,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, portanto A é limitado inferiormente e superiormente. Sendo A um subconjunto de $\mathbb{R}$ limitado inferiormente, ele tem ínfimo. De maneira análoga, sendo A um subconjunto de $\mathbb{R}$ limitado superiormente, ele tem supremo. Como 2 é uma cota superior de A e $2 \in A$, então

$$\sup A = 2.$$

Note que 1 é uma cota inferior de A, afirmamos que 1 é a maior cota inferior de A e portanto

$$\inf A = 1.$$

Para mostrarmos que 1 é a maior cota inferior de A, mostraremos que nenhum número real $x > 1$ pode ser uma cota inferior de A, ou seja, se $x > 1$; então existe $y \in A$, tal que $y < x$, isto é, existe algum número natural n_o, tal que $\frac{n_o+1}{n_o} < x$. De fato, temos

$$\frac{n+1}{n} - x = \frac{1 - n(x-1)}{n} < 0,$$

se $n > \frac{1}{x-1}$, o que é possível em virtude do Teorema 5.3. Portanto, se tomarmos n_o tal que $n_o > \frac{1}{x-1}$, então $y = \frac{n_o+1}{n_o} \in A$ e $y < x$. Logo $x > 1$ não pode ser uma cota inferior de A, como 1 é uma cota inferior de A, então 1 é a maior cota inferior de A. □

5.7 Exercícios

Exercício 5.11. *Encontre o ínfimo e o supremo dos seguintes conjuntos:*

(1) $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$.
(2) $\{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$.
(3) $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$.
(4) $\{1\} \cup (2, 3] \cup (4, 10)$.

Exercício 5.12. *O conjunto $\mathbb{Z}$ tem ínfimo ou supremo? Justifique a sua resposta.*

Exercício 5.13. *Suponha que m seja uma cota inferior para o conjunto A e que $m \in A$. Mostre que $m = \inf A$.*

Exercício 5.14. *Suponha que A e B sejam dois conjuntos não vazios de números reais, tais que $x \leq y$, para todo $x \in A$ e $y \in B$.*

(a) *Mostre que* $\sup A \leq y$, *para todo* $y \in B$.

(b) *Mostre que* $\sup A \leq \inf B$.

Exercício 5.15. *Sejam A e B sejam dois conjuntos não vazios de números reais que são limitados superiormente e seja*

$$A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\}.$$

Mostre que

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B.$$

Exercício 5.16. *Suponha que A é um subconjunto dos reais para o qual o ínfimo e o supremo existam. Mostre que* $\inf A \leq \sup A$.

Exercício 5.17. *Seja $S \subset \mathbb{Z}$ limitado superiormente. Mostre que existe $l = \sup S$ e que $l \in S$, portanto, l é um inteiro.*

6 O Teorema dos Intervalos encaixados, valor absoluto e desigualdades

AULA6: O TEOREMA DOS INTERVALOS ENCAIXADOS, VALOR ABSOLUTO E DESEIGUALDADES

OBJETIVOS

Ao final dessa aula, o aluno deverá ser capaz de:

1. Compreender a demonstração do Teorema dos Intervalos Encaixados e porque os números reais são não enumeráveis.

2. Compreender o conceito de valor absoluto e as suas propriedades e resolver desigualdades que envolvam valores absolutos.

6.1 O Teorema dos Intervalos Encaixados

Teorema 6.1. (*Intervalos Encaixados.*) *Dada a sequência decrescente $I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$ de intervalos limitados e fechados $I_n = [a_n, b_n]$, então*

$$\cap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset,$$

ou seja, existe pelo menos um real c, tal que $c \in I_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Prova. Note que dizer que existe um número L, tal que $L \in I_n$, para todo n, significa que $a_n \leq L \leq b_n$, para todo n.

Das inclusões $I_n \supset I_{n+1}$, temos

$$a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq \ldots b_n \leq \ldots \leq b_2 \leq b_1.$$

Como $a_n \leq b_1$, para todo n, segue que o conjunto

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$$

é limitado superiormente e, pelo Teorema 5.2, existe sup A, o qual denotaremos por L. Sendo L uma cota superior para A, temos

$$a_n \leq L,$$

para todo n. Além disso, como cada b_n é uma cota superior para A e L a menor das cotas superiores para A, temos

$$L \leq b_n,$$

para todo n. Portanto $a_n \leq L \leq b_n$, para todo n. $\square$

6.2 O conjunto $\mathbb{R}$ é não enumerável

Teorema 6.2. *O conjuntos dos números reais é não enumerável.*

Prova. Mostraremos que não existe função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sobrejetiva, ou seja, para toda $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, existe algum real L, tal que $L \neq f(n)$, para todo n.

Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ uma função qualquer, tome reais a_1 e b_1, tais que $f(1) < a_1 < b_1$ e defina $I_1 = [a_1, b_1]$. A seguir encontraremos um intervalo $I_2 = [a_2, b_2]$, tal que $I_2 \subset I_1$ e $f(2) \notin I_2$. De fato, se $f(2) \notin I_1$, tomamos $I_2 = I_1$, ou seja, fazemos $a_2 = a_1$ e $b_2 = b_1$. Se $f(2) \in I_1$ e $f(2) \neq a_1$, fazemos $a_2 = a_1$ e $b_2 = (a_1 + f(2))/2$. Se $f_2 \in I_1$ e $f(2) = a_1$, fazemos $a_2 = (f(2) + b_1)/2$ e $b_2 = b_1$.

Tendo encontrado intervalos $I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n$, tais que $f(j) \notin I_j$, construiremos o intervalo $I_{n+1} \subset I_n$ e $f(n+1) \notin I_{n+1}$, onde $I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}]$, com a_{n+1} e b_{n+1} definidos abaixo.

(i) Se $f(n+1) \notin I_n$, então, $a_{n+1} = a_n$ e $b_{n+1} = b_n$.

(ii) Se $f(n+1) \in I_n$ e $f(n+1) \neq a_n$, fazemos $a_{n+1} = a_n$ e $b_{n+1} = (a_n + f(n+1))/2$.

(iii) Se $f(n+1) \in I_n$ e $f(n+1) = a_n$, fazemos $a_{n+1} = (f(n+1) + b_n)/2$ e $b_{n+1} = b_n$.

Como $I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$, pelo Teorema dos intervalos encaixantes, existe algum real L que pertecem a todos os I_n's, portanto $L \neq f(n)$, para todo n, logo L não está na imagem de f, portanto f não é sobrejetiva. $\square$

6.3 Valor absoluto e desigualdades

Definição 6.1. *O valor absoluto ou módulo de um número real a, denotado por $|a|$, é definido como*

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{se } a \geq 0 \\ -a, & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

Por exemplo, $|2| = 2$ e $|-2| = 2$.

Geometricamente, na reta real, $|a|$ é a distância de a a origem.

Exercício 6.1. *Mostre que $c \leq |c|$, para todo c.*

Exercício 6.2. *Sejam a e b reais positivos, tais que* $a < b$*. Então* $\sqrt{a} < \sqrt{b}$*.*
(**Sugestão:** $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b$)

Exemplo 6.1. *Seja* $a \in \mathbb{R}$*, então*

$$\sqrt{a^2} = |a|. \tag{6.1}$$

De fato, note que $a^2 = |a|^2$, logo $\sqrt{a^2} = \sqrt{|a|^2}$. Por outro lado, como $|a| \geq 0$, segue que $\sqrt{|a|^2} = |a|$. Portanto $\sqrt{a^2} = |a|$. □

Teorema 6.3. (*Propriedades do valor absoluto*) *Sejam a e b números reais quaisquer. Então,*

$$|ab| = |a|\,|b| \tag{6.2}$$

$$|a + b| \leq |a| + |b| \quad (\textit{desigualdade triangular}) \tag{6.3}$$

$$||a| - |b|| \leq |a - b|. \tag{6.4}$$

Prova. Para provarmos (6.2), vamos considerar as seguintes possibilidades:

(i) Se $a, b > 0$, então $|a| = a$ e $|b| = b$; além disso, como $ab > 0$, temos $|ab| = ab$, portanto $|a|\,|b| = ab = |ab|$.

(ii) Se $a, b < 0$, então $|a| = -a$ e $|b| = -b$; além disso, como $ab > 0$, temos $|ab| = ab$, portanto $|a|\,|b| = (-a)(-b) = ab = |ab|$.

(iii) Se $a > 0$ e $b < 0$, temos $|a| = a$, $|b| = -b$ e como $ab < 0$, então $|ab| = -(ab)$. Portanto $|a|\,|b| = a(-b) = -(ab) = |ab|$.

(iv) Se $a < 0$ e $b > 0$, temos $|a| = -a$, $|b| = b$ e como $ab < 0$, então $|ab| = -(ab)$. Portanto $|a|\,|b| = (-a)b = -(ab) = |ab|$.

(v) Se $a = 0$ ou $b = 0$, então $ab = 0$ e portanto, $|ab| = 0$; por outro lado, devemos ter $|a| = 0$ ou $|b| = 0$, portanto $|a|\,|b| = 0$. Logo $|ab| = 0 = |a|\,|b|$.

A seguir provaremos (6.3). Note que de (6.2), temos

$$|a^2| = |aa| = |a|\,|a| = |a|^2. \tag{6.5}$$

Além disso, do Exercício 6.1 e de (6.2), temos

$$2ab \leq |2ab| = 2|a|\,|b|. \tag{6.6}$$

Portanto

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ &= |a|^2 + 2ab + |b|^2 \qquad \text{(usamos (6.5))} \\ &\leq |a|^2 + 2|a|\,|b| + |b|^2 \qquad \text{(usamos (6.6))} \\ &= (|a| + |b|)^2 \end{aligned}$$

Logo

$$(a+b)^2 \leq (|a| + |b|)^2.$$

Desta desigualdade e do Exercício 6.2, temos

$$\sqrt{(a+b)^2} \leq \sqrt{(|a| + |b|)^2}.$$

Desta desigualdade e de (6.1), temos

$$|a+b| = \sqrt{(a+b)^2} \leq \sqrt{(|a| + |b|)^2} = |a| + |b|,$$

ou seja,

$$|a+b| \leq |a| + |b|,$$

o que mostra (6.3).

A seguir provaremos (6.4). Suponha que $|a| \geq |b|$ (se $|b| > |a|$, basta repetirmos os argumentos abaixo, trocando os papéis de a e b). Como $|a| \geq |b|$, então $|a| - |b| \geq 0$, logo

$$||a| - |b|| = |a| - |b|, \tag{6.7}$$

mas de (6.3), temos

$$|a| = |(a-b) + b| \leq |a-b| + |b|,$$

portanto

$$|a| \leq |a-b| + |b|.$$

Subtraindo $|b|$ da desigualdade acima, temos

$$|a| - |b| \leq |a-b|. \tag{6.8}$$

Portanto, de (6.7) e (6.8), temos

$$||a| - |b|| = |a| - |b| \leq |a-b|.$$

□

Exercício 6.3. *Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$. Mostre que*

$$|x - z| \leq |x - y| + |y - z|.$$

Sugestão: *Note que $x - z = (x - y) + (y - z)$, use (6.3).*

Exercício 6.4. *Sejam $x_1, \ldots, x_n$ números reais. Mostre por indução que*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

Exemplo 6.2. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, então $a^2 + ab + b^2 \geq 0$.*

De fato, se $ab \geq 0$, então,

$$a^2 + ab + b^2 \geq a^2 + b^2 \geq 0.$$

Se $ab < 0$, então $-ab > 0$, portanto

$$a^2 + ab + b^2 = (a + b)^2 - ab > (a + b)^2 \geq 0.$$

□

Exemplo 6.3. *Sejam x e y reais não negativos, então*

$$\sqrt{xy} \leq (x + y)/2. \tag{6.9}$$

De fato, note que $x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2 \geq 0$, ou seja,

$$x^2 - 2xy + y^2 \geq 0,$$

logo

$$x^2 + y^2 \geq 2xy.$$

Somando-se $2xy$ a esta desigualdade, temos

$$x^2 + 2xy + y^2 \geq 4xy.$$

Portanto

$$4xy \leq (x + y)^2.$$

Tomando a raiz quadrada desta desigualdade, obtemos

$$2\sqrt{xy} \leq x + y,$$

dividindo esta desigualdade por 2, temos (6.9). $\square$

A quantidade $(x+y)/2$ é chamada *média aritmética* de x e y e $\sqrt{xy}$ é chamada *média geométrica* de x e y. O que o (6.9) está dizendo é que a média geométrica de dois números reais não negativos é sempre menor ou igual à média aritmética deles.

Exemplo 6.4. *(A desigualdade de Cauchy-Schwarz) Sejam $a_1, \ldots, a_n$ e $b_1, \ldots, b_n$ são números reais, então*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \tag{6.10}$$

De fato, sejam $A = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$, $B = \sum_{i=1}^{n} b_i^2$ e $C = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$. Se $B = 0$, então, $b_i = 0$, para $i = 1, \ldots, n$ e (6.10) é válida, pois teremos igualdade. Suponha que $B > 0$. Então

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |Ba_i - Cb_i|^2 &= \sum_{i=1}^{n} (Ba_i - Cb_i)(Ba_i - Cb_i) \\
&= B^2 \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - 2BC \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + C^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \\
&= B^2 A - BC^2 \\
&= B(AB - C^2).
\end{aligned}$$

Portanto $B(AB - C^2) = \sum_{i=1}^{n} |Ba_i - Cb_i|^2 \geq 0$; como $B > 0$, segue-se que $AB - C^2 \geq 0$; portanto $C^2 \leq AB$, o que prova (6.10). $\square$

Observação 6.1. *O que a desigualdade de Cauchy-Schwarz está dizendo é que se $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ e $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_n)$, então*

$$\left|\vec{a} \cdot \vec{b}\right| \leq ||\vec{a}||\,||\vec{b}||,$$

onde $\vec{a} \cdot \vec{b}$ é o produto escalar do vetor $\vec{a}$ com o vetor $\vec{b}$.

Exemplo 6.5. *Sejam b, ϵ números com $\epsilon > 0$. Então x satisfaz $|x - b| < \epsilon$ se, e somente se,*

$$b - \epsilon < x < b + \epsilon. \tag{6.11}$$

De fato, suponha que $|x-b| < \epsilon$. Temos uma das seguintes possibilidades: (i) $b \leq x$ ou (ii) $x < b$. Mostraremos que em qualquer um dos dois casos vale (6.11).

Se $b \leq x$, então $x - b = |x-b| < \epsilon$, mas se $x - b < \epsilon$, então $x < b + \epsilon$. Por outro lado, temos $x - b \geq 0 > -\epsilon$. Portanto, temos

$$-\epsilon < x - b < \epsilon.$$

Se $x < b$, então $b - x = |x-b| < \epsilon$, logo $b - \epsilon < x$. Por outro lado, $b - x \geq 0 > -\epsilon$, o que implica $x < b + \epsilon$. Portanto, temos

$$-\epsilon < x - b < \epsilon.$$

Reciprocamente, se $b - \epsilon < x < b + \epsilon$, então subtraindo b destas desigualdades, temos

$$-\epsilon < x - b < \epsilon \Longleftrightarrow -\epsilon < b - x < \epsilon.$$

Como $|x-b| = x - b$ ou $|x-b| = b - x$, segue das desigualdades acima que $|x-b| < \epsilon$. □

Exercício 6.5. *Mostre que existem exatamente dois números x satisfazendo a condição*

$$|x-b| = \epsilon.$$

Podemos usar o valor absoluto na representação de intervalos: por exemplo, dado um número real positivo a, podemos escrever

$$(-a, a) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, |x| < a\}.$$

Dados dois reais a, b, $|a-b|$ é a distância entre eles. O comprimento de um intervalo é a distância entre os pontos correspondentes às suas extremidades. A metade do comprimento do intervalo é chamada de raio do intervalo.

Exemplo 6.6. *Determine todos os valores de x que satisfazem à seguinte igualdade:*

$$x + |x-2| = 1 + |x|.$$

Note que a primeira coisa que temos que fazer é tirar os módulos que aparecem na igualdade; para isso teremos que encontrar os valores de x para os quais as expressões dentro dos módulos se anulam. No presente exemplo, tais pontos são $x = 2$ e $x = 0$. Com isso podemos escrever o conjunto dos números reais da seguinte forma:

$$\mathbb{R} = (-\infty, 0) \cup [0, 2) \cup [2, \infty).$$

Em $(-\infty, 0)$, temos $x < 0$, logo
$$|x| = -x,$$
como $x < 2$, então
$$|x-2| = -(x-2) = 2-x.$$
Portanto, a igualdade $x + |x-2| = 1 + |x|$ é equivalente a $x + 2 - x = 1 - x$, ou seja, $x = -1$. Logo, em $(-\infty, 0)$ a única solução de $x + |x-2| = 1 + |x|$ é $x = -1$.

Em $[0, 2)$, temos $x \geq 0$, logo
$$|x| = x,$$
como $x < 2$, então
$$|x-2| = -(x-2) - 2 - x,$$
Portanto, a igualdade $x + |x-2| = 1 + |x|$ é equivalente a $x + 2 - x = 1 + x$, ou seja, $x = 1$. Logo, em $[0, 2)$ a única solução de $x + |x-2| = 1 + |x|$ é $x = 1$.

Em $[2, \infty)$, temos $x > 0$, logo
$$|x| = x,$$
como $x \geq 2$, então
$$|x-2| = x-2.$$
Portanto, a igualdade $x + |x-2| = 1 + |x|$ é equivalente a $x + x - 2 = 1 + x$, ou seja, $x = 3$. Logo, em $[2, \infty)$ a única solução de $x + |x-2| = 1 + |x|$ é $x = 3$.

Portanto, $x + |x-2| = 1 + |x|$ se, e somente se, $x \in \{-1, 1, 3\}$. $\square$

Exercício 6.6. *Determine todos os x que satisfazem à seguinte desigualdade:*
$$|x-3| + |x-1| < 4.$$

Exercício 6.7. *Descreva o conjunto* $\{x \in \mathbb{R} : |x-2| < 5\}$.

Exercício 6.8. *Dados* $a, r \in \mathbb{R}$, *com* $r > 0$, *descreva o conjunto*
$$\{x \in \mathbb{R} : |x-a| < r\}$$
.

Exercício 6.9. *Descreva o conjunto dos pontos* $x \in \mathbb{R}$*, cuja distância a* -1 *é* 3*.*

Exercício 6.10. *Descreva o conjunto* $\{x : |x-2| < |x-6|\}$*.*

7 Definição de sequência

AULA7: SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS E LIMITES DE SEQUÊNCIAS

OBJETIVOS
Ao final dessa aula, o aluno deverá ser capaz de:
1. Compreender os conceitos de sequência e de limite de uma sequência, bem como as propriedades de limite.

2. Compreender os conceitos de sequência limitada e de sequência ilimitada.

3. Compreender e saber aplicar o Teorema do Sanduiche e a Desigualdade de Bernoulli.

4. Calcular limites de sequências.

7.1 Definição de sequência

Definição 7.1. *Uma sequência de números reais é uma função*

$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R},$$

que associa a cada natural n um número real $a(n)$, que denotaremos por a_n. Os elementos a_n's são chamados de termos da sequência, a qual denotaremos por (a_n).

Exemplo 7.1. *Alguns exemplos de sequências de números reais:*

$$1,\ 2,\ 3, \ldots, n,\ \ldots$$

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$$

$$1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^{n+1}, \ldots$$

$$3, 3, 3, 3, \ldots, 3, \ldots$$

$$1, 1/3, 1, 1/4, 1, 1/5, 1, \ldots$$

$$\cos 1, \frac{\cos 2}{2}, \frac{\cos 3}{3}, \ldots, \frac{\cos n}{n}, \ldots$$

$$2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^n, \ldots$$

Quando quisermos nos referir ao conjunto formado pelos termos da sequência, usaremos a notação $\{a_n\}$.

Exercício 7.1. *No Exemplo 7.1, quais são o nono e o décimo termos da terceira e da quinta sequências?*

Definição 7.2. *Dizemos que uma sequência (a_n) é limitada superiormente, se existir $K \in \mathbb{R}$, tal que $a_n \leq K$, para todo n. De maneira análoga, dizemos que uma sequência (a_n) é limitada inferiormente, se existir $k \in \mathbb{R}$, tal que $a_n \geq k$, para todo n.*

Exemplo 7.2. *A sequência (a_n), definida por $a_n = n$ é limitada inferiormente, pois $a_n \geq 1$, para todo n. Por outro lado, não existe um número real K, tal que $a_n \leq K$ para todo n, portanto (a_n) não é limitada superiormente.*

Exercício 7.2. *Quais das sequências do Exemplo 7.1 são limitadas superiormente e quais são limitadas inferiormente? Por quê?*

7.2 A definição de limite

Considere a sequência (a_n), cujo termo geral é $a_n = \frac{n-1}{n+1}$, então os primeiros termos desta sequência são

$$0, \frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \frac{5}{7}, \frac{6}{8}, \ldots$$

intuitivamente os termos desta sequência estão ficando cada vez mais próximos de 1. Mas o que significa isto? Tomemos um intervalo centrado em 1, digamos de raio 10^{-3}. Será que é possível encontrarmos um inteiro positivo n_o a partir do qual todos os a_n's estarão no intervalo $(1-10^{-3}, 1+10^{-3})$? Isto é equivalente a dizer que

$$1 - 10^{-3} < a_n < 1 + 10^{-3},$$

ou ainda, que

$$|a_n - 1| < 10^{-3}.$$

Note que $|a_n - 1| = \frac{2}{n+1}$, portanto $|a_n - 1| < 10^{-3}$, se tivermos $n > 2 \times 10^3 - 1$. Se ao invés de 10^{-3} tivéssemos pegado 10^{-15}, então $|a_n - 1| < 10^{-15}$, para $n > 2 \times 10^{15} - 1$. Em geral, dado um número positivo ϵ, não importa o quão pequeno ele seja, se n_o for um inteiro positivo tal que $n_o > \frac{2}{\epsilon} - 1$, então para todo $n \geq n_o$, temos

$$|a_n - 1| < \epsilon.$$

Definição 7.3. *Dizemos que uma sequência* (a_n) *converge para um número real* l*, se para todo número real positivo* ϵ *(poderíamos ter usado qualquer outra letra para denotar este número) existir um número natural* n_o*, tal que*

$$|a_n - l| < \epsilon, \tag{7.1}$$

para todo $n \geq n_o$ *(ou seja, todos os* a_n*'s com* $n \geq n_o$ *estão dentro do intervalo* $(l - \epsilon, l + \epsilon)$*). Neste caso, escrevemos*

$$l = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Se a sequência (a_n) *não convergir, dizemos que ela diverge.*

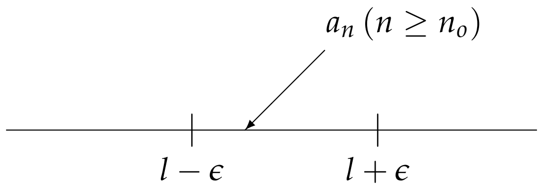


Figura 7.1: Dizer que $\lim_{n\to\infty} a_n = l$, significa que para todo $\epsilon > 0$, existe um inteiro positivo n_o tal que todos os a_n's com $n \geq n_o$ estão no intervalo $(l - \epsilon, l + \epsilon)$.

Observação 7.1. *Suponha que* $\lim_{n\to\infty} a_n = l$*. Tome um número positivo* ϵ*. Se na definição de limite fizermos* $\tilde{\epsilon} = k\epsilon$*, onde* k *é um número positivo, concluiremos que existe um inteiro positivo* n_o*, tal que se* $n \geq n_o$*, teremos* $|a_n - l| < \tilde{\epsilon} = k\epsilon$*. Resumindo, se* $\lim_{n\to\infty} a_n = l$*, então dados* ϵ *e* k *positivos, existe um inteiro positivo* n_o*, tal que se* $n \geq n_o$*, teremos*

$$|a_n - l| < k\epsilon.$$

Exemplo 7.3. *Seja* (a_n) *a sequência constante, ou seja,* $a_n = c$*, para todo* n*. Mostre que*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = c.$$

De fato, dado $\epsilon > 0$, note que $|a_n - c| = |c - c| = 0 < \epsilon$, para todo n. Assim, na definição de limite, podemos tomar como n_o qualquer número natural fixo. □

Exemplo 7.4. *Mostre*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

De fato, dado $\epsilon > 0$, tome $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $n_o > 1/\epsilon$, então se $n \geq n_o$, teremos

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_o} < \epsilon,$$

o que mostra que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

□

Exemplo 7.5. $\lim_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n} = 0.$

De fato, dado $\epsilon > 0$, tome $n_o \in \mathbb{N}$, tal que $n_o > \frac{1}{n_o}$. Como $|\cos n| \leq 1$, para todo n, se $n \geq n_o$, temos

$$\left|\frac{\cos n}{n} - 0\right| = \frac{|\cos n|}{n} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_o} < \epsilon,$$

o que mostra que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n} = 0.$$

□

Exercício 7.3. *Mostre a seguinte afirmação: existe $n_o \in \mathbb{N}$, tal que*

$$\left|\frac{n+3}{n} - 1\right| < 10^{-10},$$

para todo $n \geq n_o$.

Exercício 7.4. *Use a definição de convergência de uma sequência (em termos de ϵ e n_o) para mostrar que*

(a)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

(b)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n+1}{2n^2+1} = 1/2.$$

Exercício 7.5. *A sequência $a_n = \text{sen}(n\pi)$ converge?*

Exercício 7.6. *Mostre*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0,$$

para todo $p > 0$.

Exemplo 7.6. *Se* $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ *e* c *é uma constante, então*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - c) = l - c.$$

De fato, seja $b_n = a_n - c$, mostraremos que $\lim_{n\to\infty} b_n = l - c$. Tome $\epsilon > 0$, como $\lim_{n\to\infty} a_n = l$, então existe n_o tal que se $n \geq n_o$, temos $|a_n - l| < \epsilon$, portanto

$$|b_n - (l - c)| = |(a_n - c) - (l - c)| = |a_n - l| < \epsilon,$$

o que mostra que a sequência (b_n) converge para $l - c$. $\square$

Exemplo 7.7.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l$$

se, e somente se,

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - l) = 0.$$

De fato, se $\lim_{n\to\infty} a_n = l$, então dado $\epsilon > 0$, existe n_o, tal que se $n \geq n_o$, temos $|a_n - l| < \epsilon$, portanto

$$|(a_n - l) - 0| = |a_n - l| < \epsilon,$$

o que mostra que $\lim_{n\to\infty}(a_n - l) = 0$.

Por outro lado, se $\lim_{n\to\infty}(a_n - l) = 0$, então dado $\epsilon > 0$, existe n_o, tal que se $n \geq n_o$, temos $|(a_n - l) - 0| < \epsilon$, portanto

$$|a_n - l| = |(a_n - l) - 0| < \epsilon,$$

o que mostra que $\lim_{n\to\infty} a_n = l$. $\square$

Observação 7.2. *Dos dois exemplos anteriores, concluimos que*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l \iff \lim_{n\to\infty} |a_n - l| = 0,$$

por quê? Em particular,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \iff \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0.$$

Exercício 7.7. *Mostre que se a sequência* (a_n) *convergir para* l*, então a sequência* $(-a_n)$ *converge para* $-l$*.*

Sugestão: $|(-a_n) - (-l)| = |a_n - l|$.

Exercício 7.8. *Seja* (a_n) *convergente e* $l = \lim_{n\to\infty} a_n$.

(i) *Se* $l > 0$, *então existe um inteiro positivo* n_o, *tal que* $a_n > 0$, *para todo* $n \geq n_o$.

(ii) *Se* $l < 0$, *então existe um inteiro positivo* n_o, *tal que* $a_n < 0$, *para todo,* $n \geq n_o$.

Sugestão: *Na definição de limite, tome* $\epsilon = |l|/2$.

Exercício 7.9. *Mostre que se* (a_n) *convergir, então a sequência* $(|a_n|)$ *também converge e*

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \left| \lim_{n\to\infty} a_n \right|.$$

A recíproca deste resultado é falsa, por quê?

Sugestão: *Seja* $l = \lim_{n\to\infty} a_n$. *Se* $l = 0$, *não temos nada a fazer, veja a Obsservação 7.2. Se* $l \neq 0$, *então do Exercício 7.8, concluimos que* a_n *e* l *têm sinais iguais, para* $n \geq n_o$, *portanto* $||a_n| - |l|| = |a_n - l|$, *para* $n \geq n_o$.

Exemplo 7.8. *Seja* (a_n) *convergente e suponha que* $\alpha < a_n < \beta$, *para* $n \geq N$, *então*

$$\alpha \leq \lim_{n\to\infty} a_n \leq \beta.$$

De fato, suponha que $a_n > \alpha$, para $n \geq N$ e seja $l = \lim_{n\to\infty} a_n$. Afirmamos que $l \geq \alpha$. Assuma que $l < \alpha$, mostraremos que isto nos levará a um absurdo. De fato, se $l < \alpha$, fazendo

$$\epsilon = \frac{\alpha - l}{2}$$

na definição de limite, encontramos n_o tal que

$$a_n \in (l - \epsilon, l + \epsilon),$$

para todo $n \geq n_o$. Em particular, para todo $n \geq n_o$ devemos ter $a_n < l + \epsilon = \frac{l+\alpha}{2} < \alpha$, o que é um absurdo, pois por hipótese, $a_n > \alpha$, para todo $n \geq N$. Deixamos para o aluno mostrar que $l \leq \beta$.

Sugestão: suponha que $l > \beta$ e na definição de limite tome $\epsilon = \frac{l-\beta}{2}$, mostre que isto nos leva a um absurdo. $\square$

7.3 Unicidade do limite

Mostraremos que o limite de uma sequência convergente (a_n) é único; caso contrário, se tivéssemos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l_1 \ \ e \ \lim_{n\to\infty} a_n = l_2,$$

com $l_1 \neq l_2$, tomaríamos $\epsilon = \dfrac{|l_1 - l_2|}{2}$ e pela definição de limite, existiriam naturais n_1 e n_2, tais que

$$|a_n - l_1| < \epsilon, \ \ \text{se } n \geq n_1$$

e

$$|a_n - l_2| < \epsilon, \ \ \text{se } n \geq n_2.$$

Em particular, se $n_o = \max\{n_1, n_2\}$ (ou seja, n_o é o maior dos dois valores n_1 e n_2), então para $n \geq n_o$, teríamos $n \geq n_1$ e $n \geq n_2$, portanto

$$|a_n - l_1| < \epsilon \ \ e \ \ |a_n - l_2| < \epsilon.$$

Da primeira desigualdade todos os a_n's com $n \geq n_o$ estariam no intervalo $(l_1 - \epsilon, l_1 + \epsilon)$ e da segunda desigualdade todos os a_n's com $n \geq n_o$ estariam no intervalo $(l_2 - \epsilon, l_2 + \epsilon)$, o que seria um absurdo, pois estes intervalos são disjuntos. Esta contradição surgiu do fato de assumirmos $l_1 \neq l_2$, portanto, devemos ter $l_1 = l_2$. □

7.4 Sequências limitadas

Definição 7.4. *Dizemos que uma sequência (a_n) é limitada, se existir um número real positivo K, tal que $|a_n| \leq K$, para todo n.*

Lema 7.1. *Se (a_n) for convergente, então (a_n) é limitada.*

Prova. Suponha que $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ e na definição de limite, tome $\epsilon = 1$, então existe um natural n_o, tal que $|a_n - l| \leq 1$, se $n \geq n_o$. Portanto, segue da desigualdade triangular que

$$|a_n| = |(a_n - l) + l| \leq |a_n - l| + |l| \leq 1 + |l|,$$

para $n \geq n_o$. Seja

$$K = \max\{|a_1|, \ldots, |a_{n_o - 1}|, 1 + |l|\},$$

(ou seja, K é o maior dos valores $|a_1|, \ldots, |a_{n_o-1}|, 1 + |l|$), então $|a_n| \leq K$, para todo n. □

Uma consequência deste resultado é que se (a_n) for ilimitada, então ela não pode convergir.

Exercício 7.10. *Por que podemos dizer que a sequência* $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ *diverge?*

Exercício 7.11. *Ser limitada é uma condição necessária para que uma sequência convirja, porém não é suficiente, por quê?*

(**Sugestão:** Considere a sequência cujo n-ésimo termo é dado por $a_n = (-1)^n$)

7.5 Limites infinitos

Definição 7.5. *Dizemos que*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty,$$

se para todo número número real $M > 0$ *existir um* n_o*, tal que se* $n \geq n_o$*, então* $a_n > M$*. De maneira análoga, dizemos que*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty,$$

se para todo número real $M < 0$ *existir um* n_o*, tal que se* $n \geq n_o$*, implica* $a_n < M$*. Nos casos em que os limites são infinitos, dizemos que a sequência diverge.*

Exercício 7.12. *Dê um exemplo de uma sequência* (a_n)*, tal que* $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$*.*

Exemplo 7.9. $\lim_{n\to\infty} 2^n = \infty$.

Prova. Afirmamos que

$$2^n > n,$$

para todo inteiro positivo n.

Claramente, a desigualdade acima é verdadeira para $n = 1$, pois neste caso temos $2^1 = 2 > 1$. Assuma que ela seja verdadeira para $n = n_o$, mostraremos que ela vale para $n = n_o + 1$. De fato, se

$$2^{n_o} > n_o,$$

então ao multiplicarmos esta desigualdade por 2, teremos

$$2^{n_o+1} > 2n_o = n_o + n_o > n_o + 1.$$

Portanto, por indução, concluimos $2^n > n$, $n \in \mathbb{N}$. Logo, dado um número real positivo M, tome n_o inteiro positivo, tal que $n_o > M$. Então se $n \geq n_o$, teremos

$$2^n > n \geq n_o > M,$$

o que mostra que $\lim_{n\to\infty} 2^n = \infty$. □

Exemplo 7.10. (A *desigualdade de Bernoulli*). *Seja $r > -1$ um número real fixo. Mostre que*

$$(1+r)^n \geq 1 + nr, \tag{7.2}$$

para todo n.

De fato, mostraremos (7.2) por indução em n. Note que se $n = 1$, temos $(1+r)^1 = 1 + r$ e (7.2) é verdadeira, pois temos igualdade. Suponha que (7.2) seja válida para $n = n_o$, mostraremos que ela também é válida para $n = n_o + 1$. De fato, se

$$(1+r)^{n_o} \geq 1 + n_o r,$$

então multiplicando-se esta desigualdade por $1 + r$ e lembrando que $1 + r > 0$, temos

$$\begin{aligned}
(1+r)^{n_o+1} &\geq (1+n_o)(1+r) \\
&= 1 + (1+n_o)r + n_o \\
&> 1 + (n_o+1)r,
\end{aligned}$$

portanto (7.2) vale para $n = n_o + 1$ e, por indução, (7.2) vale para todo n positivo. □

Exemplo 7.11. *Em geral, podemos mostrar que se c é um número real maior do que 1, então, temos*

$$\lim_{n\to\infty} c^n = \infty.$$

De fato, note que todo real $c > 1$, pode ser escrito como

$$c = 1 + r,$$

onde $r = c - 1 > 0$. Portanto, da desigualdade de Bernoulli, temos

$$c^n = (1+r)^n \geq 1 + nr,$$

para todo inteiro positivo n. Dado $M > 0$, seja n_o tal que $n_o > M/r$, então, se $n \geq n_o$, temos $n_o r > M$ e da desigualdade de Bernoulli, temos

$$c^n = (1+r)^n \geq 1 + nr \geq 1 + n_o r \geq 1 + M > M.$$

□

Exemplo 7.12. *Em geral, podemos mostrar que se c é um número real com $|c| < 1$, então, temos*

$$\lim_{n\to\infty} c^n = 0.$$

De fato, note que se $c = 0$, temos a sequência constante $a_n = 0$, cujo limite é 0. Se $0 < |c| < 1$, podemos escrever $|c| = \dfrac{1}{1+r}$, onde $r > 0$. Da desigualde de Bernoulli, temos

$$(1+r)^n \geq 1 + nr,$$

o que implica que

$$\frac{1}{(1+r)^n} \leq \frac{1}{1+nr},$$

portanto

$$|c|^n = \frac{1}{(1+r)^n} \leq \frac{1}{1+nr}.$$

Logo, dado $\epsilon > 0$, tome n_o um inteiro positivo, tal que $n_o > \dfrac{1}{\epsilon r}$, o que implica que $\dfrac{1}{n_o r} < \epsilon$. Então, se $n \geq n_o$, temos

$$|c|^n \leq \frac{1}{1+nr} \leq \frac{1}{1+n_o r} < \frac{1}{n_o r} < \epsilon.$$

Isto mostra que $\lim\limits_{n\to\infty} |c|^n = 0$, o que é equivalente a dizer que $\lim\limits_{n\to\infty} c^n = 0$, veja Exercício 7.9. □

7.6 O Teorema do Sanduiche

Teorema 7.1. ($\mathit{Teorema\ do\ Sanduiche}$) *Sejam (a_n), (b_n) e (c_n) sequências, tais que*

$$b_n \leq a_n \leq c_n,$$

para todo n e

$$\lim_{n\to\infty} b_n = l = \lim_{n\to\infty} c_n.$$

Então

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l.$$

Prova. Dado arbitrariamente $\epsilon > 0$, mostraremos que existe $n_o'' \in \mathbb{N}$, tal que $|a_n - l| < \epsilon$, para todo $n \geq n_o''$.
Tome $\epsilon > 0$ qualquer. Como

$$\lim_{n\to\infty} b_n = l = \lim_{n\to\infty} c_n,$$

existem $n_o, n_o' \in \mathbb{N}$, tais que $n \geq n_o$ implica $|b_n - l| < \epsilon$ e $n \geq n_o'$ implica $|c_n - l| < \epsilon$. Seja $n_o'' = \max\{n_o, n_o'\}$, então $n \geq n_o''$ implica $|b_n - l| < \epsilon$ e $|c_n - l| < \epsilon$, ou seja, b_n e c_n estão no intervalo $(l - \epsilon, l + \epsilon)$ para $n \geq n_o''$, em particular, para $n \geq n_o''$ temos

$$l - \epsilon \leq b_n \leq a_n \leq c_n \leq l + \epsilon,$$

o que é equivalente a $|a_n - l| < \epsilon$. □

No Teorema do Sanduiche podemos substituir a hipótese de $b_n \leq a_n \leq c_n$, para todo n, por $b_n \leq a_n \leq c_n$, para todo $n \geq N$, onde N é um inteiro positivo, por quê?

Exemplo 7.13. *Mostre que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n} = 0.$$

De fato, como $|\cos n| \leq 1$, para todo inteiro positivo n, então

$$0 \leq \left|\frac{\cos n}{n}\right| = \frac{|\cos n|}{n} \leq \frac{1}{n},$$

para todo n. Se fizermos $a_n = \left|\frac{\cos n}{n}\right|$, $b_n = 0$ e $c_n = \frac{1}{n}$, então temos $b_n \leq a_n \leq c_n$ e $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$; portanto do Teorema do Sanduiche concluimos que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, ou seja, $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{\cos n}{n}\right| = 0$ e da Observação 7.2 concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n} = 0.$$

□

Exemplo 7.14. *Calcule o seguinte limite*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2+n+1}.$$

De fato, note que

$$\frac{n+1}{n^2+n+1} = \frac{1}{n}\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{n+\frac{1}{n}+1}\right) \leq \frac{1}{n}.$$

Portanto

$$0 \leq \frac{n+1}{n^2+n+1} \leq \frac{1}{n}.$$

Sejam $a_n = \frac{n+1}{n^2+n+1}$, $b_n = 0$ e $c_n = \frac{1}{n}$, então $b_n \leq a_n \leq c_n$, como sequências (b_n) e (c_n) convergem para zero, então pelo Teorema do Sanduiche, concluimos que a sequência (a_n) também converge para zero. □

Exemplo 7.15. *Calcule o seguinte limite*

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}).$$

De fato, note que

$$\begin{aligned}\sqrt{n+1}-\sqrt{n} &= \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\\ &< \frac{1}{\sqrt{n}}.\end{aligned}$$

Portanto

$$0 \leq \sqrt{n+1}-\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}},$$

Sejam $a_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$, $b_n = 0$ e $c_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, então temos as seguintes desigualdades: $b_n \leq a_n \leq c_n$, como as sequências (b_n) e (c_n) convergem para zero, então pelo Teorema do Sanduiche, concluimos que a sequência (a_n) também converge para zero. □

Exemplo 7.16. *Seja (a_n) uma sequência, tal que $x_n > 0$ e*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L > 0,$$

então

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n} = \sqrt{L}.$$

De fato, tome $\epsilon > 0$, como $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, em virtude da Observação 7.1 existe inteiro positivo n_o, tal que se $n \geq n_o$, temos

$$|a_n - L| < \sqrt{L}\,\epsilon.$$

Portanto, se $n \geq n_o$, temos

$$|\sqrt{a_n}-\sqrt{L}| = \left|\frac{a_n - L}{\sqrt{a_n}+\sqrt{L}}\right| < \left|\frac{a_n - L}{\sqrt{L}}\right| < \epsilon.$$

□

Exemplo 7.17. *Seja (b_n) uma sequência limitada (convergente ou não) e $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Então*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n\, b_n) = 0.$$

De fato, tome $\epsilon > 0$, como (b_n) é limitada, existe $K > 0$, tal que $|b_n| \leq K$, para todo n. Como $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, então em virtude da Observação 7.2, concluimos que $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$; portanto, pela Observação 7.1 existe um inteiro positivo n_o, tal que $n \geq n_o$ implica $|a_n| < \dfrac{\epsilon}{K}$, ou seja,

$$|a_n b_n - 0| = |a_n b_n| = |a_n||b_n| \leq K|a_n| \leq \frac{\epsilon}{K}\, K < \ \epsilon,$$

com isso concluimos a demonstração. □

7.7 Propriedades de Limite

Teorema 7.2. *Sejam (a_n) e (b_n) duas sequências convergentes e c um número real qualquer, então as sequências (ca_n), $(a_n + b_n)$, $(a_n\, b_n)$ são convergentes, além disso, temos*

(*i*) $\lim\limits_{n\to\infty} (ca_n) = c \lim\limits_{n\to\infty} a_n$,

(*ii*) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$,

(*iii*) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n\, b_n) = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n)(\lim\limits_{n\to\infty} b_n)$.

Se $b_n \neq 0$, para todo n e $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, então sequência $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ também convergirá e

(*iv*) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$.

Prova. (i) Seja $l = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Dado $\epsilon > 0$, mostraremos que existe $n_o \in \mathbb{N}$, tal que se $n \geq n_o$, temos

$$|(ca_n) - cl| = |c|\,|a_n - l| < \epsilon.$$

De fato, como $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$, então em virtude da Observação 7.1, existe $n_o \in \mathbb{N}$, tal que se $n \geq n_o$, temos

$$|a_n - l| < \frac{\epsilon}{|c| + 1},$$

portanto

$$|(ca_n) - cl| = |c|\,|a_n - l| \leq |c|\ \frac{\epsilon}{|c| + 1} < \epsilon,$$

o que prova (i).

(ii) Sejam $l_1 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ e $l_2 = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Dado $\epsilon > 0$, mostraremos que existe $n_o \in \mathbb{N}$, tal que se $n \geq n_o$, temos

$$|(a_n + b_n) - (l_1 + l_2)| = |(a_n - l_1) + (b_n - l_2)| < \epsilon.$$

De fato, como $\lim_{n\to\infty} a_n = l_1$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = l_2$, em virtude da Observação 7.1 existem inteiros positivos n_1, n_2, tais que se $n \geq n_1$ teremos

$$|a_n - l_1| < \frac{\epsilon}{2} \tag{7.3}$$

e se $n \geq n_2$ temos

$$|b_n - l_2| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{7.4}$$

Seja

$$n_o = \max\{n_1, n_2\},$$

então se $n \geq n_o$, temos $n \geq n_1$ e $n \geq n_2$, portanto valem as desigualdades (7.3) e (7.4). Então para $n \geq n_o$, segue da desigualdade triangular e das desigualdades (7.3) e (7.4) que

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (l_1 + l_2)| &= |(a_n - l_1) + (b_n - l_2)| \\ &\leq |a_n - l_1| + |b_n - l_2| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \end{aligned}$$

o que mostra (ii).

(iii) Sejam $l_1 = \lim_{n\to\infty} a_n$ e $l_2 = \lim_{n\to\infty} b_n$. Dado $\epsilon > 0$, mostraremos que existe $n_o \in \mathbb{N}$, tal que se $n \geq n_o$, temos

$$|a_n\, b_n - l_1 l_2| = |(a_n - l_1)b_n + l_1(b_n - l_2)| < \epsilon.$$

De fato, como (b_n) é convergente, ela é limitada, ou seja, existe uma constante positiva K, tal que $|b_n| < K$, para todo n. Tome $\epsilon > 0$. Como as sequências (a_n) e (b_n) convergem para l_1 e l_2, respectivamente, então pelo Exemplo 7.7, as sequências $(a_n - l_1)$ e $(b_n - l_2)$ para zero e pela Observação 7.1 existem inteiros positivos n_1 e n_2, tais que se $n \geq n_1$, teremos

$$|a_n - l_1| < \frac{\epsilon}{2K} \tag{7.5}$$

e se $n \geq n_2$, temos

$$|b_n - l_2| < \frac{\epsilon}{2(l_1 + 1)}. \tag{7.6}$$

Seja

$$n_o = \max\{n_1, n_2\},$$

então se $n \geq n_o$ valem as desigualdades (7.5) e (7.6). Portanto, para $n \geq n_o$, segue da desigualdade triangular e das desigualdades (7.5) e (7.5) que

$$\begin{array}{rcl} |a_n\, b_n - l_1 l_2| & = & |(a_n - l_1)b_n + l_1(b_n - l_2)| \\ & \leq & |(a_n - l_1)|\,|b_n| + |l_1|\,|(b_n - l_2)| \\ & < & \dfrac{\epsilon}{2K}\, K + |l_1|\, \dfrac{\epsilon}{2(l_1+1)} \\ & < & \dfrac{\epsilon}{2} + \dfrac{\epsilon}{2} \\ & = & \epsilon, \end{array}$$

o que prova (iii).

(iv) Sejam $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l_1$ e $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = l_2 \neq 0$. Dado $\epsilon > 0$, mostraremos que existe $n_o \in \mathbb{N}$, tal que se $n \geq n_o$, temos

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{l_1}{l_2}\right| = \left|\frac{(a_n - l_1)l_2 + l_1(l_2 - b_n)}{l_2 b_n}\right| < \epsilon.$$

De fato, como $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = l_2 \neq 0$, existe um inteiro positivo n_1, tal que se $n \geq n_1$, temos

$$|b_n| > \frac{|l_2|}{2},$$

por quê? Portanto

$$\frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|l_2|} \quad e \quad \frac{1}{|l_2 b_n|} < \frac{2}{l_2^2}. \tag{7.7}$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l_1$ e $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = l_2$, as sequências $(a_n - l_1)$ e $(b_n - l_2)$ convergem para zero e, em virtude da Observação 7.1 existem $n_2, n_3 \in \mathbb{N}$, tais que se $n \geq n_2$, temos

$$|a_n - l_1| < \frac{|l_2|}{4}\, \epsilon \tag{7.8}$$

e se $n \geq n_3$, temos

$$|b_n - l_2| \leq \frac{|l_2|^2}{4(|l_1|+1)}\, \epsilon. \tag{7.9}$$

Seja

$$n_o = \max\{n_1, n_2, n_3\}.$$

Então se $n \geq n_o$, valem as desigualdades (7.7)-(7.9). Portanto, para $n \geq n_o$ segue da desigualdade triangular e das desigualdades (7.7), (7.8) e (7.9) que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_n}{b_n}-\frac{l_1}{l_2}\right| &= \left|\frac{(a_n-l_1)l_2+l_1(l_2-b_n)}{l_2 b_n}\right| \\
&\leq \frac{|(a_n-l_1)|\,|l_2|+|l_1|\,|(l_2-b_n)|}{|l_2 b_n|} \\
&< \frac{2}{|l_2|}\frac{1}{4}|l_2|\;\epsilon+\frac{2}{|l_2|^2}|l_1|\frac{|l_2|^2}{4(|l_1|+1)}\;\epsilon \\
&< \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon,
\end{aligned}$$

o que mostra (iv). □

Observação 7.3. *Note que das propriedades (i) e (ii), se (a_n) e (b_n) forem convergentes e α e β forem números reais quaisquer, então,*

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)=\alpha\lim_{n\to\infty}a_n+\beta\lim_{n\to\infty}b_n.$$

Por indução, temos a seguinte generalização: sejam (a_n^1), ..., $({a^k}_n)$ sequências convergentes e $c_1,\ldots,c_k$ constantes. Então a sequência

$$(c_1{a^1}_n+\ldots+c_k{a^k}_n)$$

converge e

$$\lim_{n\to\infty}(c_1{a^1}_n+\ldots+c_k{a^k}_n)=c_1\lim_{n\to\infty}{a^1}_n+\ldots+c_k\lim_{n\to\infty}{a^k}_n. \tag{7.10}$$

Exemplo 7.18.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3+n^2+1}{2n^3-100n-3}=\frac{3}{2}.$$

De fato, note que

$$\frac{3n^3-4n^2+5}{2n^3-100n-3}=\frac{3-\frac{4}{n}+\frac{5}{n^2}}{2-\frac{100}{n}-\frac{3}{n^2}},$$

para obter o lado esquerdo da igualdade acima, dividimos o numerador e o denominador do lado esquero por n^3. De (7.10), temos

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{4}{n}+\frac{5}{n^2}\right) &= 3\lim_{n\to\infty}1-4\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+5\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} \\
&= 3\times 1-4\times 0+5\times 0=3.
\end{aligned}$$

De maneira análoga, temos

$$\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{100}{n}-\frac{3}{n^2}\right)=2\times 1-100\times 0-3\times 0=2\neq 0.$$

Portanto, da Propriedade da propriedade (iv) do limite, temos

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3+n^2+1}{2n^3-100n-3} &= \lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{4}{n}+\frac{5}{n^2}}{2-\frac{100}{n}-\frac{3}{n^2}}\\ &= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\dfrac{4}{n}+\dfrac{5}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\dfrac{100}{n}-\dfrac{3}{n^2}\right)}=\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

□

Exemplo 7.19.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^3+2n+1}{5n^2+3n+1}=+\infty.$$

De fato, note que

$$\frac{4n^3+2n+1}{5n^2+3n+1}=n\quad\frac{4+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}}.$$

Como

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}}=4,$$

por quê? Se na definição de limite fizermos $\epsilon=3$, concluiremos que existe n_o, tal que se $n\geq n_o$, então

$$\left|\frac{4+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}}-4\right|<3,$$

portanto

$$\frac{4+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}}>1.$$

Logo, para $n\geq n_o$, temos

$$\frac{4n^3+2n+1}{5n^2+3n+1}>n,$$

isto implica que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^3+2n+1}{5n^2+3n+1}=+\infty.$$

De fato, dado $M > 0$, seja $n_o' = \max\{n_o, [M] + 1\}$, onde $[M]$ é a parte inteira de M, portanto, $[M] + 1 > M$. Então, se $n > n_o'$, teremos

$$\frac{4n^3 + 2n + 1}{5n^2 + 3n + 1} > n > [M] + 1 > M.$$

□

Exercício 7.13. *Seja $r \neq 1$ um número real.*

(i) Mostre que

$$1 + r + r^2 + \ldots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}. \tag{7.11}$$

(ii) Mostre que se $|r| < 1$, então

$$\lim_{n\to\infty} (1 + r + r^2 + \ldots + r^n) = \frac{1}{1 - r}. \tag{7.12}$$

Sugestão: *Mostre por indução em n que $(1 - r)(1 + r + r^2 + \ldots + r^n) = 1 - r^{n+1}$.*

Note que do item (i) do exercício acima, se $|r| < 1$, então

$$r + r^2 + \ldots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} - 1 = \frac{r - r^{n+1}}{1 - r} \tag{7.13}$$

logo

$$\lim_{n\to\infty} (r + r^2 + \ldots + r^n) = \frac{r}{1 - r}. \tag{7.14}$$

Exercício 7.14. *Mostre que*

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{10^k}\right)^j = \frac{1 - \left(\frac{1}{10^k}\right)^n}{10^k - 1}, \tag{7.15}$$

em particular,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{10^k}\right)^j = \frac{1}{10^k - 1}. \tag{7.16}$$

Exemplo 7.20. *A sequência* (a_n), *cujo termo geral é*

$$a_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$$

converge para 1.

De fato, note que

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1},$$

portanto

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1.$$

□

Exercício 7.15. *Mostre que se* (a_n) *e* (b_n) *forem sequências convergentes e* $a_n \leq b_n$, *para todo* $n \geq N$, *então* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.
Sugestão: *Mostre que se* $c_n \leq 0$ *para* $n \geq N$ *e* $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = l$, *então* $l \leq 0$. *Fazendo* $c_n = a_n - b_n$, *então* $c_n \leq 0$, *portanto* $\lim\limits_{n\to\infty} c_n \leq 0$, *mas da propriedades do limite, temos*

$$\lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} c_n \leq 0.$$

Exercício 7.16. *Sejam* (a_n) *e* (b_n) *sequências tais que* $a_n \leq b_n$, *para* $n \geq N$ *e*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty.$$

Mostre que

$$\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty.$$

Resolução. Dado $L > 0$, como $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, então existe um inteiro positivo n_1, tal que

$$a_n > L,$$

para todo $n \geq n_1$. Seja $n_o = \max\{n_1, N\}$. Então se $n \geq n_o$, temos

$$b_n \geq a_n > L,$$

portanto $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$. □

Exemplo 7.21. *Vimos no Exemplo 7.19 que*

$$\frac{4n^3+2n+1}{5n^2+3n+1} > n,$$

para $n \geq n_o$. Como $\lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$, do Exercício 7.16, concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^3+2n+1}{5n^2+3n+1} = +\infty.$$

Exercício 7.17. *Dada uma sequência (a_n), seja (b_n) a sequência cujo o termo geral b_n é definido como $b_n = a_{n_o+n-1}$, para algum inteiro positivo n_o. Ou seja, b_n é a sequência $a_{n_o}, a_{n_o+1}, a_{n_o+2}, \ldots$. Então (a_n) converge se, e somente se, (b_n) convergir. Além disso, caso estas sequências convirjam, seus limites são iguais. Ou seja, no que diz respeito ao limite, o que importa é o comportamento da sequência para valores grandes de n.*

Exemplo 7.22. *Seja x um número real positivo. Mostre que*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1.$$

De fato, se $x = 1$, o resultado é óbvio, pois $\sqrt[n]{1} = 1$, para todo n e o limite de uma constante é a própria constante.

Suponha $x > 1$, então $\sqrt[n]{x} > 1$, portanto podemos escrever $\sqrt[n]{x} = 1 + h_n$, onde $h_n > 0$. Então, da desigualdade de Bernoulli, temos

$$x = (1+h_n)^n \geq 1 + nh_n.$$

Isto implica que

$$0 \leq h_n \leq \frac{x-1}{n}.$$

Portanto, pelo Teorema do Sanduiche, temos $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0$, logo

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = \lim_{n\to\infty} (1+h_n) = 1.$$

Se $0 < x < 1$, então $1/x > 1$ e vimos que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1/x} = 1$, como $\sqrt[n]{x} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{1/x}}$, da propriedade (iv) do limite, temos

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{1/x}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1/x}} = \frac{1}{1} = 1.$$

□

Lema 7.2. *Seja r um número real não negativo. Então*

$$(1+r)^n \geq 1 + nr + n(n-1)r^2/2. \tag{7.17}$$

Prova. Se $n = 1$, então $(1+r) = 1 + r$ e (7.17) é verdadeira. Suponha que (7.17) seja verdadeira para $n = k$, onde $k \geq 1$, mostraremos que isto implicará que (7.17) também valerá para $n = k+1$; portanto, por indução em n, concluiremos que (7.17) vale para todo n. De fato,

$$\begin{aligned} (1+r)^{k+1} &= (1+r)^k(1+r) \\ &\geq \left(1 + kr + \frac{k(k-1)r^2}{2}\right)(1+r) \\ &= 1 + (k+1)r + \frac{(k+1)kr^2}{2} + \frac{k(k-1)r^3}{2} \\ &\geq 1 + (k+1)r + \frac{(k+1)kr^2}{2}. \end{aligned}$$

Na primeira desigualdade acima usamos a hipótese de indução, ou seja, a validade (7.17) para $n = k$. Na última desigualdade usamos que $k \geq 1$, portanto, $\frac{k(k-1)r^3}{2} \geq 0$. Com isso concluimos que (7.17) vale para $n = k+1$. □

Exemplo 7.23.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

De fato, note que $\sqrt[n]{n} > 1$, portanto podemos escrever

$$\sqrt[n]{n} = 1 + h_n,$$

onde $h_n > 0$ e do Lema 7.2, temos

$$n = (1+h_n)^n \geq 1 + nh_n + \frac{n(n-1)h_n^2}{2} > \frac{n(n-1)h_n^2}{2},$$

Como $n > \frac{n(n-1)h_n^2}{2}$, então para $n \geq 2$, temos

$$0 < h_n < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}.$$

Das desigualdades acima e do Teorema do Sanduiche, concluimos que $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$, logo

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} (1+h_n) = 1.$$

□

Teorema 7.3. (*Teste da Razão*) *Suponha que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l.$$

(*i*) *Se* $l < 1$, *então* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(*ii*) *Se* $l > 1$, *então* $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Prova. Se $l < 1$, como $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, existe n_o, tal que se $n \geq n_o$, temos

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - l \right| \leq \frac{1-l}{2},$$

da desigualdade acima e da desigualdade triangular, temos

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \left| \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - l \right) + l \right| \\ &\leq \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - l \right| + l \\ &\leq \frac{1-l}{2} + l \\ &= \frac{l+1}{2}. \end{aligned}$$

Fazendo $L = \frac{l+1}{2}$, então para $n \geq n_o$, temos

$$|a_{n+1}| \leq L|a_n|.$$

Da desigualdade acima, segue por indução que

$$|a_{n_o+p}| \leq L^p |a_{n_o}| = L^{n_o+p} |a_{n_o}|^{1-n_o},$$

para todo $p \geq 1$. Logo, para todo $n \geq n_o + 1$, temos

$$0 \leq |a_n| \leq \left(|a_{n_o}|^{1-n_o} \right) L^n$$

como $L < 1$, $\lim_{n\to\infty} L^n = 0$, portanto, das desigualdades acima e do Teorema do Sanduiche, temos $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$; portanto $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, o que mostra (i). Deixamos para o aluno o caso em que $l > 1$, ou seja, o item (ii). □

Note que se $a_n = n$, então $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, mas a sequência (a_n) não converge. Por outro lado se $a_n = \frac{1}{n}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ e $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Ou seja, se no Teste da Razão tivermos $l = 1$, não podemos dizer nada sobre $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Exemplo 7.24.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} = 0.$$

De fato, seja $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$, então

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{4n^2+6n+2} = \frac{1}{4} < 1,$$

portanto, pelo Teste da Razão, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

7.8 Subsequências

Definição 7.6. *Dada uma sequência (a_n), seja*

$$M = \{n_1, n_2, n_3, \ldots\},$$

com $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$, um subconjunto qualquer de $\mathbb{N}$. Então a sequência (a_{n_i}) é chamada de uma subsequência da sequência (a_n).

Exemplo 7.25. *Dada a sequência $((-1)^{n+1})$, as sequências*

$$1, 1, 1, \ldots \ e \ -1, -1, -1, \ldots,$$

são subsequências de $((-1)^{n+1})$, sendo que a primeira é obtida considerando-se somente os termos de $((-1)^{n+1})$ com índices pares, e a segunda é obtida considerando-se somente os termos de $((-1)^{n+1})$ com índices ímpares.

Definição 7.7. *Dizemos que o número real r é um ponto de acumulação da sequência (a_n), se existir alguma subsequência de (a_n) convergindo para r.*

Exemplo 7.26. *Dada a sequência $((-1)^{n+1})$, as suas subsequências $1, 1, 1, \ldots$ e $-1, -1, -1, \ldots$ convergem para 1 e -1, respectivamente. Ou seja, 1 e -1 são pontos de acumulação $((-1)^{n+1})$. É possível que a sequência $1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$ seja convergente?*

Exercício 7.18. *Encontre os pontos de acumulação das sequências abaixo:*

(i) $2, 2, \ldots,$

(ii) $1, 1/2, 1, 1/4, 1, 1/8, 1, 1/16, \ldots,$

(iii) $0, 2, -1, 0, 3, -1, 0, 4, -1, 0, 5, -1, \ldots$.

(iv) *Quais das sequências acima são convergentes? Por quê?*

Exercício 7.19. *Mostre que se* (a_n) *convergir, então toda subsequência de* (a_n) *também é convergente e o seu limite é o mesmo que o limite de* (a_n)*. Em particular, se uma sequência possuir duas subsequências convergindo para valores diferentes, ela não pode convergir.*

Exercício 7.20. *Se* (a_n) *possuir apenas um ponto de acumulação ela converge?*

Exercício 7.21. *Dê um exemplo de uma sequência que não possui subsequência convergente.*

Exercício 7.22. *A sequência* $a_n = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \cos(n\pi)$ *converge?*

Exercício 7.23. *Seja* (a_n) *definida por*

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{se } n \text{ for ímpar} \\ -4, & \text{se } n \text{ for par} \end{cases}$$

Explique por que a_n *não converge para* 1*.*

Exercício 7.24. *Seja* (a_n) *definida por*

$$a_n = \begin{cases} 5, & \text{se } n \text{ for divisível por } 5 \\ \frac{1}{n}, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Explique por que a_n *não converge para* 0*.*

Exercício 7.25. *Dê um exemplo de uma sequência (a_n) de números irracionais convergindo para um número racional.*

Exercício 7.26. *Para cada sequência, determine se ela converge e, em caso afirmativo, calcule o seu limite.*

(a) $a_n = \frac{n}{n+1}$
(b) $c_n = 2^{-n}$
(c) $x_n = 52 + (-1)^n$
(d) $y_n = n!$
(e) $\frac{\operatorname{sen} n}{n}$
(f) $\frac{4n^2+3}{3n^2-2}$
(g) $s_n = (2)^{1/n}$
(h) $\frac{7n^3+8n}{2n^3-37}$
(i) $\frac{2^{n+1}-3}{2^n+1}$.

8

O Teorema de Bolzano-Weierstrass e sequências de Cauchy

AULA8: O TEOREMA DE BOLZANO-WEIERSTRASS E SEQUÊNCIAS DE CAUCHY

OBJETIVOS
Ao final dessa aula, o aluno deverá ser capaz de:
1. Compreender porque toda uma sequência monótona e limitada é convergente.
2. Compreender a demonstração do Teorema de Bolzano-Weierstrass e saber usá-lo em aplicações.
3. Compreender o conceito de sequência de Cauchy e que uma sequência de números reais é convergente se, e somente se, ela for de Cauchy.

8.1 Sequências monótonas

Definição 8.1. *Dizemos que uma sequência* (a_n) *é monótona não-decrescente, se* $a_n \leq a_{n+1}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *e que* (a_n) *é monótona não-crescente, se* $a_{n+1} \leq a_n$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*. Se* $a_n < a_{n+1}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*, dizemos que* (a_n) *é crescente e se* $a_{n+1} < a_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*, dizemos que* (a_n) *é decrescente.*

Exemplo 8.1. *A sequência cujo o n-ésimo termo é* $a_n = 1/n$ *é decrescente, pois*

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)} < 0,$$

para todo n*.*

Note que se a sequência (a_n) for monótona não-decrescente, então

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \ldots \leq a_n \leq a_{n+1} < \ldots$$

portanto $a_n \geq a_1$, para todo n, logo, (a_n) é limitada inferiormente por a_1. Da mesma forma se (a_n) é monótona não-crescente, então (a_n) é limitada superiormente por a_1.

Exemplo 8.2. *Mostre que se uma sequência for monótona não-decrescente e possuir uma subsequência limitada, então ela é limitada.*

De fato, suponha que (a_n) seja monótona não-decrescente e que seja (a_{n_i}) uma subsequência limitada de (a_n). Então existe um K, tal que $a_{n_i} \leq K$, para todo i. Dado $n \in \mathbb{N}$, tome n_i tal que $n < n_i$, como (a_n) é não-decrescente, segue-se que $a_n \leq a_{n_i}$, como $a_{n_i} \leq K$, segue-se que $a_n \leq K$. Portanto $a_1 \leq a_n \leq K$, para todo n. $\square$

Exercício 8.1. *Mostre que se uma sequência for monótona não-crescente e possuir uma subsequência limitada, então ela é limitada.*

Teorema 8.1. *Toda sequência monótona limitada é convergente.*

Prova. Vamos supor que (a_n) seja monótona não-crescente, ou seja, $a_{n+1} \leq a_n$, e limitada. Deixaremos para o aluno o caso em que (a_n) é monótona não-decrescente (veja Exercício 8.2). Seja

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\},$$

como (a_n) é limitada, então A é limitado, portanto, limitado inferiormente e, então existe um número real l, tal que $l = \inf A$. Mostraremos que

$$l = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Dado $\epsilon > 0$, pela definição de ínfimo, $l + \epsilon$ não é uma cota inferior para A, logo existe $n_o \in \mathbb{N}$, tal que

$$l \leq a_{n_o} < l + \epsilon.$$

Como (a_n) é não-crescente, para $n > n_o$ devemos ter $a_n \leq a_{n_o}$. Da definição de ínfimo de um conjunto, temos $l \leq a_n$, para todo n. Portanto $l \leq a_n \leq a_{n_o} < l + \epsilon$, logo

$$l - \epsilon < l \leq a_n \leq a_{n_o} < l + \epsilon.$$

Mostramos que para todo $\epsilon > 0$, existe n_o, tal que se $n \geq n_o$, implica $|a_n - l| < \epsilon$, ou seja, $l = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

De modo análogo, se (a_n) for monótona não-decrescente, mostra-se que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup A.$$

□

Exercício 8.2. *Termine a demonstração do Teorema 8.1, assumindo que (a_n) seja monótona não-decrescente.*

Observação 8.1. *O Teorema* 8.1 *continua valendo se a sequência (a_n) for monótona a partir de um certo n_o, ou seja, se tivermos $a_{n+1} \leq a_n$ ou $a_{n+1} \geq a_n$, para $n \geq n_o$; por quê?*

Exemplo 8.3. *Seja* $a_1 = 1$ *e*

$$a_{n+1} = \frac{a_n + 1}{3},$$

para $n \geq 1$. *Então* $a_n > \frac{1}{2}$, *para todo* n, *a sequência* (a_n) *é decrescente e o seu limite é* $\frac{1}{2}$.

De fato, mostraremos por indução que $a_n > \frac{1}{2}$. Esta desigualdade vale para $n = 1$, pois

$$a_1 = 1 > \frac{1}{2}.$$

Assuma que $a_n > \frac{1}{2}$, mostraremos que $a_{n+1} > \frac{1}{2}$. De fato, se $a_n > \frac{1}{2}$, temos

$$a_{n+1} = \frac{a_n + 1}{3} > \frac{\frac{1}{2} + 1}{3} = \frac{1}{2},$$

logo $a_{n+1} > \frac{1}{2}$.
Mostraremos que (a_n) é decrescente. Como $a_n > \frac{1}{2}$, então

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n + 1}{3} - a_n = -\frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3} < -\frac{2}{3}\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 0,$$

o que mostra que $a_{n+1} < a_n$, portanto (a_n) é decrescente. Como (a_n) é limitada inferiormente e decrescente, então pelo Teorema 8.1 ela é convergente. Seja $l = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, então $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = l$. Portanto

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n + 1}{3}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n + 1}{3}$$

e concluimos que $l = \frac{l+1}{3}$, o que implica que $l = \frac{1}{2}$. $\square$

Exemplo 8.4. *Seja* $a_1 = \sqrt{2}$ *e* $a_{n+1} = \sqrt{2 + \sqrt{a_n}}$, *para* $n \geq 1$. *Então* (a_n) *converge.*

De fato, mostraremos por indução que $a_n < 2$, para todo n. Esta desigualdade vale para $n = 1$, pois $a_1 = \sqrt{2} < 2$. Suponha que $a_n < 2$, mostraremos que $a_{n+1} < 2$. De fato, se $a_n < 2$, então $\sqrt{a_n} < \sqrt{2}$, portanto, $2 + \sqrt{a_n} < 2 + \sqrt{2} < 4$, e portanto

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + \sqrt{a_n}} < \sqrt{4} = 2.$$

A seguir mostraremos que (a_n) é crescente. De fato, como $0 < a_{n+1} < 2$, então $a_{n+1} < \sqrt{2 + a_{n+1}}$, por quê? Portanto $a_{n+1} < \sqrt{2 + a_{n+1}} = a_{n+2}$, o que prova que (a_n) é crescente. Como (a_n) é limitada superiormente e crescente, pelo Teorema 8.1, ela converge. $\square$

Exemplo 8.5. *Sejam* $0 < a_1 < b_1$ *e defina*

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

Então as sequências (a_n) *e* (b_n) *convergem.*

De fato, mostraremos por indução que

$$a_1 < a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n < b_1, \tag{8.1}$$

o que implica que as sequências (a_n) e (b_n) são limitadas e monótonas, (a_n) é crescente e (b_n) é decrescente, portanto pelo Teorema 8.1, elas convergem. Note que se $0 < a < b$, multiplicando esta desigualdade por a e extraindo a raiz quadrada da desigualdade obtida, concluimos $a < \sqrt{ab}$. Além disso, como $a < b$, então $\frac{a+b}{2} < b$. Por outro lado, vimos na Aula 4 que $\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$, logo

$$a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b. \tag{8.2}$$

Como $0 < a_1 < b_1$, de (8.2) concluimos que

$$a_1 < \sqrt{a_1 b_1} < \frac{a_1 + b_1}{2} < b_1,$$

ou seja,

$$a_1 < a_2 < b_2 < b_1,$$

portanto (8.1) vale para $n = 1$. Suponha que (8.1) valha para n, ou seja, $a_1 < a_n < b_n < b_1$, então de (8.2), concluimos que

$$a_1 < a_n < \sqrt{a_n b_n} < \frac{a_n + b_n}{2} < b_n < b_1,$$

portanto

$$a_1 < a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_1,$$

o que mostra que (8.1) vale para $n+1$, com isso concluimos a nossa demonstração.

$\square$

Exercício 8.3. *Seja* $a_1 = -2$ *e* $a_{n+1} = \frac{2}{5}\, a_n$, *para* $n \geq 1$. *Calcule* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Exemplo 8.6. *(O número e) A sequência*

$$a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!},$$

é convergente e o seu limite está entre 2 *e* 3.

De fato, note que (a_n) é crescente, por quê? Mostraremos que (a_n) é limitada superiormente e sendo ela limitada superiormente e crescente, pelo Teorema 8.1, concluiremos que ela converge. Claramente $a_n \geq 2$, para todo n, por quê? Resta-nos encontrar uma cota superior para a_n. Deixaremos a cargo do aluno mostrar por indução que

$$(n+1)! \geq 2^n,$$

para todo $n \geq 1$. Logo

$$\frac{1}{(k+1)!} \leq \frac{1}{2^k},$$

para todo $k \geq 1$, portanto

$$\begin{aligned}
2 \quad \leq \quad & a_n \leq 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) \\
= \quad & 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \quad \text{(usamos (7.11))} \\
= \quad & 1 + 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \\
< \quad & 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 3.
\end{aligned}$$

Portanto, a sequência (a_n) é limitada superiormente por 3. Como $2 < a_n < 3$, concluímos que o seu limite, o qual denotaremos por e, está entre 2 e 3. No Exemplo 8.7, mostraremos que e é irracional. $\square$

Exercício 8.4. *Seja q um número natural, mostre que*

$$\sum_{j=0}^{n-q-1} \frac{1}{(q+2)^l} = \frac{q+2}{q+1}\left(1 - \left(\frac{1}{q+2}\right)^{n-q}\right).$$

Sugestão: *Veja* (7.11).

Exemplo 8.7. *O número e é irracional.*

De fato, suponha que e fosse um número racional, ou seja,

$$e = p/q,$$

onde $p, q \in \mathbb{N}$, são primos entre si. Mostraremos que isto nos levará a uma contradição, ou seja, mostraremos que

$$\frac{1}{(q+1)} \leq q!(p/q - a_q) \leq \frac{q+2}{(q+1)^2}, \tag{8.3}$$

como $\frac{q+2}{(q+1)^2} < 1$, para todo q natural, as desigualdades acima estão dizendo que

$$0 < q!(p/q - a_q) < 1.$$

Mas é fácil vermos que $q!(p/q - a_q)$ é um inteiro, por quê? Mas não existe inteiro entre 0 e 1. Este absurdo veio da nossa hipótese de e ser um número racional, logo e não pode ser um número racional, portanto e é um número irracional.

A seguir mostraremos (8.3). Tome $n > q$, então

$$a_n - a_q = \sum_{j=q+1}^{n} \frac{1}{j!} > \frac{1}{(q+1)!}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
a_n - a_q &= \sum_{j=q+1}^{n} \frac{1}{j!} \\
&= \frac{1}{(q+1)!} + \frac{1}{(q+2)!} + \frac{1}{(q+3)!} + \ldots + \frac{1}{n!} \\
&= \frac{1}{(q+1)!} \left(1 + \frac{1}{(q+2)} + \frac{1}{(q+2)(q+3)} + \right. \\
&\quad \left. \ldots + \frac{1}{(q+2)(q+3)\ldots n}\right) \\
&\leq \frac{1}{(q+1)!} \sum_{j=0}^{n-q-1} \frac{1}{(q+2)^l} \\
&= \frac{q+2}{(q+1)(q+1)!} \left(1 - \left(\frac{1}{q+2}\right)^{n-q}\right) \\
&< \frac{q+2}{(q+1)(q+1)!} = \frac{q+2}{(q+1)^2 q!}.
\end{aligned}$$

Na quarta igualdade acima usamos o Exercício 8.4. Portanto

$$\frac{1}{(q+1)} < q!(a_n - a_q) < \frac{q+2}{(q+1)^2},$$

para todo $n > q$. Como a sequência $(q!(a_n - a_q))$ satisfaz as desigualdades acima e converge para $q!(p/q - a_q)$ então, pelo Exercício 7.8, temos

$$\frac{1}{(q+1)} \leq q!(p/q - a_q) \leq \frac{q+2}{(q+1)^2},$$

com isso concluimos a demonstração. □

Exemplo 8.8. *A sequência cujo termo geral é*

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

converge e o seu limite está entre $\frac{1}{2}$ *e* 1.

De fato, note que na soma

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n}$$

temos n parcelas e cada uma delas menores ou iguais a $\dfrac{1}{n+1}$, portanto

$$a_n \leq n\,\frac{1}{n+1} < 1.$$

Logo (a_n) é limitada superiormente por 1. Para $n \geq 4$, temos

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{(n+1)(2n+1)} > 0,$$

Sendo (a_n) limitada superiormente e $a_n + 1 > a_n$, para $n \geq 4$, então pelo Teorema 8.1 ela converge, seja l o seu limite. Mostraremos que $\frac{1}{2} \leq l \leq 1$.

Como $a_{n+1} > a_n$, para $n \geq 4$, então $a_n \geq a_4$, para $n \geq 4$. Portanto

$$a_n \geq \min\{a_1, a_2, a_3, a_4\} = \frac{1}{2},$$

para todo n. Portanto $\frac{1}{2} \leq a_n < 1$, com isso concluimos que $\frac{1}{2} \leq l \leq 1$. □

8.2 O Teorema de Bolzano-Weierstrass

Teorema 8.2. (*Teorema de Bolzano-Weierstrass*) *Toda sequência limitada* (a_n) *tem uma subsequência convergente.*

Prova. Seja B o subconjunto de $\mathbb{R}$, formado por todos aqueles números x para os quais existem no máximo um número finito de índices n, tais que $a_n > x$. Como a_n é limitada, existe $K > 0$, tal que $|a_n| \leq K$, para todo n, ou seja, $-K \leq a_n \leq K$, para todo n. Como $a_n \leq K$, para todo n, segue-se que $(K, \infty) \subset B$, portanto $B \neq \emptyset$. Por outro lado, se $x < -K$, então $a_n > x$, para todo n, portanto $x \notin B$. Disso concluimos que $x \geq -K$, para todo $x \in B$, ou seja, $-K$ é uma cota inferior para B. Sendo B um subconjunto não vazio e limitado inferiormente de $\mathbb{R}$, ele tem ínfimo, seja

$$m = \inf B.$$

Para todo inteiro positivo j, existe um número infinito de índices n, tais que

$$a_n \in \left(m - \frac{1}{j}, m + \frac{1}{j}\right),$$

caso contrário, $(m - \frac{1}{j}, m + \frac{1}{j}) \subset B$, em particular, $m - \frac{1}{2j}$ estaria em B, isto implicaria que $\inf B \leq m - \frac{1}{2j}$, o que seria uma contradição. Tome n_1, tal que $a_{n_1} \in (m-1, m+1)$, depois tome $n_2 > n_1$, tal que $a_{n_2} \in (m - 1/2, m + 1/2)$. Procedendo desta forma, encontraremos uma sequência de índices $n_1 < n_2 < \ldots < n_j < \ldots$, tais que

$$a_{n_j} \in \left(m - \frac{1}{j}, m + \frac{1}{j}\right),$$

ou seja,

$$|a_{n_j} - m| < \frac{1}{j},$$

o que implica que a subsequência a_{n_j} tende m, quando j tende a infinito. □

8.3 Sequência de Cauchy

Definição 8.2. *Dizemos que uma sequência de números reais (a_n) é de Cauchy, se para todo $\epsilon > 0$, existir $n_o \in \mathbb{N}$, tal que*

$$|a_n - a_m| < \epsilon,$$

para todos $m, n \geq n_o$.

Teorema 8.3. *Uma sequência (a_n) é convergente se, e somente se, ela for de Cauchy.*

Prova. Suponha que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = r$, então, dado $\epsilon > 0$, exite $n_o \in \mathbb{N}$, tal que

$$|a_n - r| < \epsilon/2,$$

para todo $n \geq n_o$. Sejam m, n naturais, tais que $m, n \geq n_o$, então pela desigualdade triangular, temos

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &= |(a_n - r) + (r - a_m)| \leq |a_n - r| + |a_m - r| \\ &< \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon, \end{aligned}$$

portanto (a_n) é de Cauchy.

Reciprocamente, suponha que (a_n) seja de Cauchy. Mostraremos que (a_n) é limitada e, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, ela possui uma subsequência (a_{n_j}) convergente; finalmente, mostraremos que (a_n) converge para o mesmo limite que (a_{n_j}).

Na definição de sequência de Cauchy, tome $\epsilon = 1$, então existe n_o, tal que para todo $m, n \geq n_o$, temos
$$|a_n - a_m| < 1.$$
Logo, fazendo $m = n_o$, concluimos que
$$|a_n - a_{n_o}| < 1,$$
para todo $n \geq n_o$, portanto, desta desigualdade e da desigualdade triangular, temos
$$|a_n| = |(a_n - a_{n_o}) + a_{n_o}| \leq |a_n - a_{n_o}| + |a_{n_o}| < 1 + |a_{n_o}|,$$
para todos $n \geq n_o$. Seja
$$K = \max\{|a_1|, \ldots, |a_{n_o-1}|, 1 + |a_{n_o}|\},$$
então
$$|a_n| \leq K,$$
para todo n, o que mostra que (a_n) é limitada. Seja (a_{n_j}) uma subsequência convergente de (a_n) e l o seu limite. Dado $\epsilon > 0$, existe n_o' tal que
$$|a_{n_j} - l| < \frac{\epsilon}{2}, \tag{8.4}$$
para todo $n_j > n_o'$. Como (a_n) é de Cauchy, para ϵ dado existe n_o'', tal que
$$|a_n - a_m| < \frac{\epsilon}{2}, \tag{8.5}$$
para todo $m, n > n_o''$. Seja
$$n_o''' = \max\{n_o', n_o''\}$$
e tome $n_{j_o} > n_o'''$. Da desigualdade triangular, de (8.4) e de (8.5) (na qual fizemos $m = n_{j_o}$), segue que
$$\begin{aligned} |a_n - l| &= |(a_n - a_{n_{j_o}}) + (a_{n_{j_o}} - l)| \\ &\leq |(a_n - a_{n_{j_o}})| + |(a_{n_{j_o}} - l)| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \end{aligned}$$
para todo $n > n_o'''$, o que mostra que (a_n) converge para l. □

Exemplo 8.9. *Seja (a_n) uma sequência tal que*
$$|a_{n+1} - a_n| \leq 2^{-n},$$
para todo n. Então (a_n) é de Cauchy.

De fato, note que da desigualdade triangular, temos

$$\begin{aligned}
|a_{n+k} - a_n| &= \left|\sum_{j=n}^{n+k-1} (a_{j+1} - a_j)\right| \\
&\leq \sum_{j=n}^{n+k-1} |(a_{j+1} - a_j)| \\
&\leq \sum_{j=n}^{n+k-1} 2^{-j} \\
&= \sum_{l=0}^{k-1} 2^{-(n+l)} \\
&= 2^{-n} \sum_{l=0}^{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^l \\
&= 2^{-n+1} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k\right) \\
&< 2^{-n+1}.
\end{aligned}$$

Portanto, se $m \geq n$, temos

$$|a_m - a_n| \leq 2^{-n+1}.$$

Logo, dado $\epsilon > 0$, se tomarmos n_o tal que $2^{-n_o+1} < \epsilon$, então se $n, m > n_o$, teremos $|a_m - a_n| \leq 2^{-\min\{n,m\}+1} < 2^{-n_o+1} < \epsilon$. Logo, (a_n) é de Cauchy. □

8.4 Exercícios

Exercício 8.5. *Mostre por indução que para $n \geq 1$, temos a seguinte desigualdade*

$$\frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{n}.$$

Usando o Teorema do Sanduiche, mostre que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

Exercício 8.6. *Verifique cada um dos seguintes limites.*

(1) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+n} = 1.$

(2) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n} = \max(a,b)$, *onde* $a, b > 0$.

Exercício 8.7. *Encontre os seguintes limites.*

(1) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n}\right).$

(2) $\lim_{n\to\infty} \left(n - \sqrt{n+a}\ \sqrt{n+b}\right).$

(3) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n + (-1)^n}{2^{n+1} + (-1)^{n+1}}.$

(4) $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}\ \cos(n^n)}{n+1}.$

Exercício 8.8. *O que é que podemos dizer sobre a sequência (a_n), se ela converge e cada a_n é um inteiro?*

Exercício 8.9. *Seja (a_n) uma sequência de termos positivos convergindo para l. Mostre que a sequência $\left(\sqrt[n]{p_1 p_2, \ldots p_n}\right)$ também converge para l.*

Exercício 8.10. *Seja (a_n) uma sequência de termos positivos, tais que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$. Mostre $(\sqrt[n]{a_n})$ também converge para l.*

Exercício 8.11. *Mostre que* $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n}{n^2}\right)=\frac{1}{2}$.

Sugestão. *Mostre que por indução que* $1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

Exercício 8.12. ($Aproximações sucessivas da raiz quadrada de c$) *Seja c um número real positivo. Mostre que*

$$a_{n+1}=\frac{a_n+\frac{c}{a_n}}{2}$$

converge para $\sqrt{c}$.

Exercício 8.13. *Defina a sequência* (a_n) *indutivamente, pondo*

$$a_1=a_2=1 \ e \ a_{n+2}=a_{n+1}+a_n,$$

para todo n. Escreva

$$x_n=\frac{a_n}{a_{n+1}}$$

e supondo que

$$\lim_{n\to\infty}x_n=c,$$

encontre c.

8.5 Representação decimal de números reais

Na Aula 3, falamos sobre a representação decimal de um número racional; nesta seção falaremos sobre a representação decimal de um número real qualquer.

Dado um número real x, digamos $x > 0$, existe um número inteiro não negativo n_o, tal que $n_o \leq x < n_o + 1$, ou seja, podemos escrever $x = n_o + x_o$, onde $x_o = x - n_o$, portanto $x_o \in [0, 1)$. Logo

$$x = n_o + x_o,$$

onde $x_o \in [0, 1)$.

Como $x_o \in [0, 1)$, se dividirmos os intervalo $[0, 1]$ em 10 em subintervalos de comprimentos iguais a $\frac{1}{10}$, então x_o tem que estar num destes subintervalos; ou seja,

$$x_o \in \left[\frac{k_1}{10}, \frac{(k_1+1)}{10}\right),$$

para algum $k_1 = 0, 1, \ldots, 9$. Logo $x_1 = x - \frac{k_1}{10}$ está no intervalo $[0, \frac{1}{10})$, ou seja, podemos escrever $x_o = \frac{k_1}{10} + x_1$ e portanto

$$x = n_o + \frac{k_1}{10} + x_1,$$

onde $x_1 \in [0, \frac{1}{10})$.

Como $x_1 \in [0, \frac{1}{10})$, se dividirmos este intervalo em 10 subintervalos de comprimentos iguais a $\frac{1}{100}$, então x_1 estará num destes subintervalos, ou seja, $x_1 \in [\frac{k_2}{100}, \frac{(k_2+1)}{100})$, para algum $k_2 = 0, 1, \ldots, 9$, portanto, $x_2 = x_1 - \frac{k_2}{100} \in [0, \frac{1}{100})$; logo podemos escrever $x_1 = \frac{k_2}{100} + x_2$, onde $x_2 \in [0, \frac{1}{100})$. Portanto, temos

$$x = n_o + \frac{k_1}{10} + \frac{k_2}{10^2} + x_2,$$

onde $x_2 \in [0, \frac{1}{100})$.

Em geral, dado $x_n \in [0, \frac{1}{10^n})$, podemos escrever

$$x_n = \frac{k_{n+1}}{10^{n+1}} + x_{n+1}, \tag{8.6}$$

onde $k_{n+1} = 0, 1, \ldots, 9$ e $x_{n+1} \in [0, \frac{1}{10^{n+1}})$. Portanto, podemos escrever

$$x = n_o + \frac{k_1}{10} + \frac{k_2}{10^2} + \ldots + \frac{k_n}{10^n} + x_n,$$

onde $x_n \in [0, \frac{1}{10^n})$ e $k_i = 0, 1, \ldots, 9$, para $i = 1, 2, \ldots, n$. Como $x_n \in [0, \frac{1}{10^n})$, então $0 \leq x_n < \frac{1}{10^n}$, portanto, pelo Teorema do Sanduiche, $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Portanto a sequência

$$s_n = n_o + \frac{k_1}{10} + \frac{k_2}{10^2} + \ldots + \frac{k_n}{10^n}$$

converge para x. Por causa disso dizemos que

$$x = n_o + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k_i}{10^i}.$$

Uma expressão da forma $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$, onde a_i são números reais, é chamada de uma série numérica.

Note que

$$n_o + \frac{k_1}{10} + \frac{k_2}{10^2} + \ldots + \frac{k_n}{10^n} = n_o, k_1 k_2 \ldots \ldots k_n,$$

então a sequência $n_o, k_1 k_2 \ldots \ldots k_n$ converge para x e escrevemos

$$x = n_o, k_1 k_2 \ldots \ldots k_n \ldots,$$

que é chamada de *representação decimal* de x.

Se x e y forem dois números reais tais que as suas representações decimais são infinitas e distintas, então $x \neq y$. Para mostrar isso, consideraremos x e y particulares, mas os argumentos que usaremos se generalizarão para qualquer par de números que tenham representações decimais infinitas e distintas. Sejam $x = 3,81476\ldots$ e $y = 3,81475\ldots$ Como as duas representações são distintas tem pelo menos um algarismo onde elas diferem, no presente caso x e y diferem no quinto algarimo, o que vem depois deste algarítmo pode ser qualquer coisa (estamos excluindo a possibilidade de uma sequência infinita de zeros após o quinto algarismo em qualquer uma das representações). Note que $x > 3,81476$, por outro lado,

$$y \leq 3,81475\overline{9} = 3,81476.$$

Logo

$$x > 3,81476 \geq y.$$

Portanto $x > y$. $\square$

REFERÊNCIAS

[1] Lages Lima, Elon*Análise Real*, volume 1, RJ, segunda edição, IMPA, CNPQ, 1993 (coleção Matemática Universitária).

[2] Djairo Guedes Figueiredo, *Análise I*, segunda edição, Livros Técnicos e Científicos S.A, 1996.

[3] R. P. Burn, *Numbers and functions Steps into Analysis*, University Press, Cambridge, 1992

[4] César Polcino Milies e Sônia Pitta Coelho, *Números, uma introdução à matemática*, Editora da Universidade de São Paulo, 1998

[5] Walter Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, Third Edition, McGraw-Hill, Inc. 1976

[6] Ivan Niven, *Números: Racionais e Irracionais*, Coleção Fundamentos da Matemática Elementar, SBM, 1984.

Composto em caracteres Aller, Arial, Calibri, PT Sans e Times New Roman.
Editorado pelo Centro de Apoio à Educação a Distância da UFMG (CAED-UFMG).
Capa em Supremo, 250g, 4 X 0 cores - Miolo couchê fosco 90g, 2X2 cores.
2013

ISBN 978-8-5647242-5-9

Centro de Apoio à Educação a Distância

PROGRAD
PRÓ-REITORIA
DE GRADUAÇÃO

UFMG

UAB
UNIVERSIDADE
ABERTA DO BRASIL

GOVERNO FEDERAL
BRASIL
PAÍS RICO É PAÍS SEM POBREZA